

$$\text{MERF} = \left\{ \langle Y_1 \rangle \langle Y_2 \rangle \dots \langle Y_n \rangle \$ \langle B_1 \rangle \dots \langle B_n \rangle \$ \langle \text{Formel} \rangle \mid \begin{array}{l} \text{mehrwertige } \langle \text{FORMEL} \rangle \text{ ist erfüllbar} \end{array} \right\}$$

ist NP-vollständig.

z.B: $X_1, X_2, X_3 \$ \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 3, 5\} \$$

$$((X_1 = 3 \wedge X_3 \neq 3) \vee (X_2 = 4 \vee X_1 = 1 \vee X_3 \neq 1)) \wedge X_2 = 5$$

Bew: (i) $\text{MERF} \in \text{NP}$ "errate" erfüllende Belegung und verifiziere

(ii) $\forall L \in \text{NP} : L \leq_p \text{MERF}$

$$L \in \text{NP} \Rightarrow \exists \text{ TM } M_L \text{ mit } L(M_L) = L$$

$g \dots$ worst case Laufzeit

$$g(n) \leq c \cdot n^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$c, k \in \mathbb{N}$
(konstant)

$$M_L = (\Sigma, \Gamma, Q, s, F, \delta, \Delta)$$

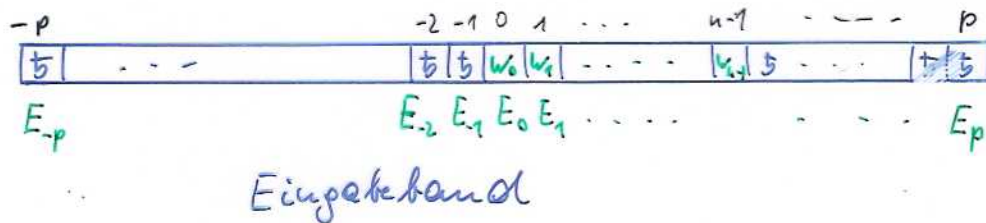
geg $w \in \Sigma^*$

Wollen MERF-Formel F_w

$$F_w \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow w \in L$$

w wird von M_L akzeptiert

$$p = g(|w|)$$



Schritt t	Zustand	E-Kopf Pos.	A-Kopf Pos.	A-Bandinhalt
0	z^0	I^0	J^0	
1	z^1	I^1	J^1	
$\vdots$				
$t-1$	z^{t-1}	I^{t-1}	J^{t-1}	
t	z^t	I^t	J^t	
$\vdots$				
p	z^p	I^p	J^p	

$F_w = \text{Anfang} \wedge \text{Übergänge} \wedge \text{Ende}$

$$\begin{aligned} \text{Anfang} = & (z^0 = s) \wedge (I^0 = 0) \wedge (J^0 = 0) \wedge ((E_{-p} = b) \wedge \dots \wedge (E_{-1} = b) \wedge (E_0 = w_0) \wedge \dots \wedge (E_{n-1} = w_{n-1}) \\ & \wedge (E_n = b) \wedge \dots \wedge (E_p = b)) \\ & \wedge ((A_{-p}^0 = b) \wedge \dots \wedge (A_p^0 = b)) \end{aligned}$$

$$\text{Übergänge} = \bigwedge_{1 \leq t \leq p} U^t$$

$$U^t = \bigvee_{\substack{-p \leq i \leq p \\ -p \leq j \leq p}} U_{ij}^t$$

$$U_{ij}^t = (I^{t-1} = i) \wedge (J^{t-1} = j) \wedge \bigwedge_{\substack{-p \leq l \leq p \\ l \neq j}} (A_l^t = A_l^{t-1}) \wedge$$

$$\bigwedge_{(q, a, B, q', \lambda, \beta', \mu) \in \Delta} ((z^{t-1} = q) \wedge (E_i = a) \wedge (A_j^{t-1} = B) \wedge (z^t = q') \wedge (I^t = i + \lambda) \wedge (A_j^t = B') \wedge (J^t = j + \mu))$$

MERF

$$\exists Y_1 \in \{1, 2, 3\}$$

$$\exists Y_2 \in \{3, 5, 7\}$$

$$\exists Y_3 \in \{1, 2, 5\}$$

$$\exists Y_4 \in \{1, 2, 3\} :$$

$$((Y_1=2) \wedge (Y_2 \neq Y_3)) \vee ((Y_3=Y_4) \wedge (Y_1 \neq 3)) \dots$$

SMERF

$$\exists Y_1 \in \{1, 2, 3\}$$

$$\exists Y_2 \in \{3, 5, 7\}$$

$$\exists Y_3 \in \{1, 2, 5\}$$

$$\exists Y_4 \in \{1, 2, 3\} :$$

$$((Y_1=2) \wedge (((Y_2=3) \wedge ((Y_3=1) \vee (Y_3=2) \vee (Y_3=5))$$

$$\vee ((Y_2=5) \wedge ((Y_3=1) \vee (Y_3=2))$$

$$\vee ((Y_2=7) \wedge ((Y_3=1) \vee (Y_3=2) \vee (Y_3=5))))$$

$$\vee (\dots)$$

SAT

$$\exists x_1, \dots, x_n \in \{\text{true}, \text{false}\}$$

$$((x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_1)) \wedge (\neg(x_1 \vee x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3))$$

$$\text{MERF} \leq_p \text{SMERF} \leq_p \text{SAT}$$

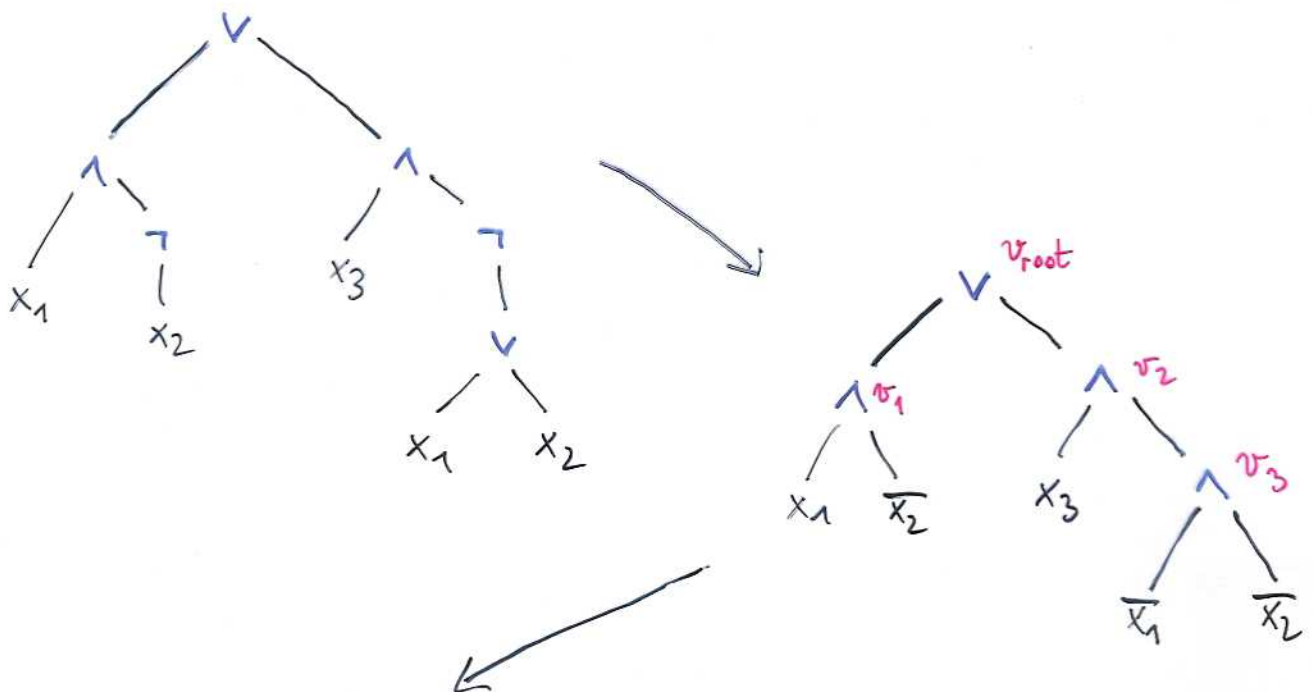
3-SAT $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \{\text{true}, \text{false}\} :$

$$x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4 \quad \wedge \quad x_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_4 \quad \wedge \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \quad \wedge \quad x_2 \vee \bar{x}_4$$

Konjunktion von Klauseln mit ≤ 3 Literalen

$\text{SAT} \leq_p \text{3-SAT}$

$$(x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_3 \wedge \neg(x_1 \vee x_2))$$



$$\begin{aligned} v_{\text{root}} &\wedge v_{\text{root}} \Leftrightarrow v_1 \vee v_2 \quad \wedge \quad v_1 \Leftrightarrow x_1 \vee \bar{x}_2 \quad \wedge \\ &\wedge v_2 \Leftrightarrow x_3 \wedge v_3 \quad \wedge \quad v_3 \Leftrightarrow \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \end{aligned}$$

in KNF bringen

CLIQUE

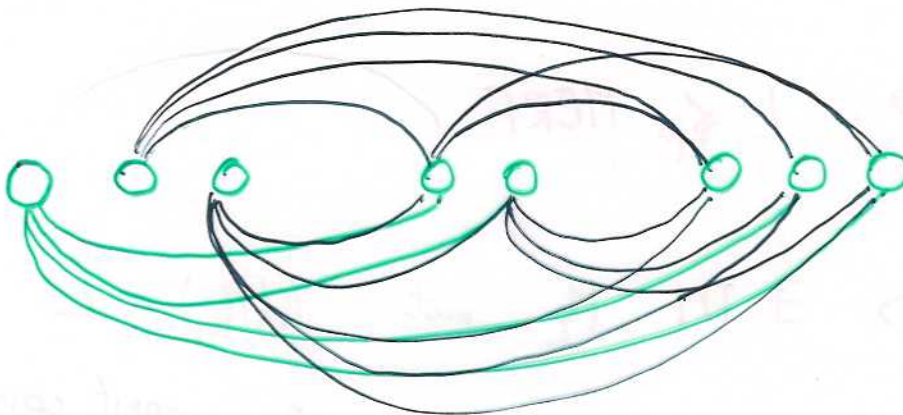
Geg: ungerichteter Graph $G=(V,E)$
 $k \in \mathbb{N}$

Frage: besitzt G eine Clique der Größe k ?

$$\exists W \subseteq \binom{V}{k} : \binom{W}{2} \subseteq E$$

3-SAT $\leq_p$ CLIQUE

$$x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4 \quad \wedge \quad x_2 \vee x_3 \quad \wedge \quad \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4$$



F erfüllbar $\Leftrightarrow G$ hat Clique
der Größe $m=3$