

P-UNIV

Definition

$P-UNIV = \{\text{cod}(M) \$ w \$ 1^m \mid \text{nichtdet. TM } M \text{ akzeptiert } w \text{ in } \leq m \text{ Schritten}\}$

Satz

$P-UNIV$ ist NP-vollständig.

Beweis.

- ① $P-UNIV \in NP$: Simuliere M auf Eingabe w für m richtig geratene Schritte.
- ② $L \leq_P P-UNIV$ für jedes $L \in NP$: L wird von einer nichtdet. TM M mit Laufzeit $\leq c \cdot n^k$ akzeptiert. Baue TM F , die als Ausgabe $\text{cod}(M) \$ w \$ 1^{c \cdot n^k}$ produziert. F hat Laufzeit $O(n^k)$. □



Vereinfachungen von MERF

MERF (Wiederholung)

- Instanz:**
- Variablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit (endlichen) Wertebereichen $B_1, \dots, B_n$
 - Formel F , aufgebaut mit $\wedge$ und $\vee$ aus Termen der Form
 - ▶ $Y_i = a$
 - ▶ $Y_i \neq a$
 - ▶ $Y_i = Y_j$
 - ▶ $Y_i \neq Y_j$

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, die F wahr macht?

Wird MERF leichter, wenn wir:

- Art der Terme beschränken?
- Wertebereiche der Variablen einschränken?
- nur spezielle Formeln erlauben?



MERF – Mehrwertige Erfüllbarkeit

MERF

- Instanz:**
- Variablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit (endlichen) Wertebereichen $B_1, \dots, B_n$
 - Formel F , aufgebaut mit $\wedge$ und $\vee$ aus Termen der Form
 - ▶ $Y_i = a$
 - ▶ $Y_i \neq a$
 - ▶ $Y_i = Y_j$
 - ▶ $Y_i \neq Y_j$

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, die F wahr macht?

Definition

$MERF = \{\text{cod}(Y_1) \cdots \text{cod}(Y_n) \$ \text{cod}(B_1) \cdots \text{cod}(B_n) \$ \text{cod}(F) \mid F \text{ erfüllbar}\}$

Satz

$MERF$ ist NP-vollständig.



SMERF – Simple Mehrwertige Erfüllbarkeit

SMERF

- Gegeben:**
- Variablen $Y_1, \dots, Y_n$ mit Wertebereichen $B_1, \dots, B_n$
 - Formel F , die als $\wedge$ und $\vee$ von Termen der Form $Y_i = a$ aufgebaut ist.
(Terme der Form $Y_i \neq a$, $Y_i = Y_j$ und $Y_i \neq Y_j$ sind nicht erlaubt.)

Frage: Gibt es eine Variablenbelegung, die F wahr macht?

Satz

$SMERF$ ist NP-vollständig.

Beweis.

Vergleiche Übungsblatt 12, Aufgabe 1 □



SAT

Gegeben: Boole'sche Formel F in Boole'schen Variablen

Beispiel: $(X_1 \vee X_2 \vee \overline{X_3}) \wedge (X_3 \vee \overline{X_4})$

Frage: Ist F erfüllbar, d. h. gibt es Wahrheitsbelegungen der Variablen, so dass F wahr ist?

Satz

SAT ist NP-vollständig.



Beweis.

- ① SAT $\in$ NP: Rate nichtdet. Wahrheitsbelegungen und verifiziere F
- ② SMERF $\preceq_P$ SAT:
 - ▶ Wollen: $\text{cod}(Y_1) \cdots \text{cod}(Y_n) \$ \text{cod}(B_1) \cdots \text{cod}(B_n) \$ \text{cod}(F') \mapsto \text{cod}(F)$
 - ▶ Konstruktion:
 - ★ Variablen X_{ib} , $1 \leq i \leq n$, $b \in B_i$ (X_{ib} kodiert $Y_i = b$)
 - ★ F_1 entstehe aus F' indem wir Terme $Y_i = b$ durch X_{ib} ersetzen
 - ★ Müssen $\forall i$ sicherstellen: genau eine der $X_{ib_1}, X_{ib_2}, \dots, X_{ib_m}$ ist wahr
 - ★ Dazu neue Variablen $D_i = \bigvee_{b \in B_i} (X_{ib} \wedge \bigwedge_{b' \in B_i, b' \neq b} \overline{X_{ib'}})$
 - ★ Setze $F_2 = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} D_i$
 - ★ Dann $F = F_1 \wedge F_2$
 - ▶ Es gilt: F' erfüllbar $\Leftrightarrow F$ erfüllbar
 - ▶ Laufzeit: (Größe der SMERF-Instanz sei g)
 - ★ proportional zur Länge von F
 - ★ $|F_1| \in O(|F'|) \in O(g)$
 - ★ $|D_i| \leq |B_i|^2 \in O(g^2) \Rightarrow |F_2| \in O(g^3)$
 - ★ $\Rightarrow |F| \in O(g^3)$, polynomiell in g



3-SAT

3-SAT

Gegeben: Boole'sche Formel F in KNF (konjunktiver Normalform) mit ≤ 3 Literalen pro Klausel, d. h.

- $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_i \wedge \cdots \wedge K_m$
- $K_i = (L_{i1} \vee \cdots \vee L_{ij} \vee \cdots \vee L_{it})$
- Jedes Literal L_{ij} ist eine Variable X_k oder deren Negation $\overline{X_k}$

Frage: Ist F erfüllbar, d. h. gibt es Wahrheitsbelegungen der Variablen, so dass F wahr ist?

Satz

3-SAT ist NP-vollständig.

