

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz und Zeit berechnet werden kann)

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Satz B: (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Satz C: (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz)

$$\text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz und Zeit berechnet werden kann)

Satz D: (Sprachkomplement)

$$\text{DTIME}(f(n)) = \text{co-DTIME}(f(n)) \quad \text{DSPACE}(f(n)) = \text{co-DSPACE}(f(n))$$

$$\text{NSPACE}(f(n)) = \text{co-NSPACE}(f(n))$$

Satz E: (Hierarchie) $f \in O(g)$

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(g(n)) \quad \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(g(n))$$

$$\text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(g(n)) \quad \text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(g(n))$$

Satz F: (strikte Hierarchie)

$$f(n) \in o(g(n)) \Rightarrow \text{DSPACE}(f(n)) \subsetneq \text{DSPACE}(g(n))$$

$$f(n) \in o(g(n)/\log g(n)) \Rightarrow \text{DTIME}(f(n)) \subsetneq \text{DTIME}(g(n))$$

Lemma C: $L \in \text{NSPACE}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSpace}(f(n)^2)$

Lemma D: $L \in \text{NSPACE}(f(n)) \Rightarrow \overline{L} \in \text{NSPACE}(f(n))$

Lemma C: $L \in \text{NSPACE}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSpace}(f(n)^2)$

Lemma D: $L \in \text{NSPACE}(f(n)) \Rightarrow \overline{L} \in \text{NSPACE}(f(n))$

Beweis beider Lemmata reduziert sich auf “Berechnen” von Erreichbarkeit in einem sehr großen, implizit gegebenen Graphen. Es muss die Frage beantwortet werden

$\exists$ gerichteter Pfad von $\text{init}(w)$ zu einer Endkonfiguration im Konfigurationsgraphen $\text{KG}_M(w, N)$

$n=|w| \quad N=f(n)$

Abstraktes Problem:

Gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist **implizit** gegeben, d.h. man kann

- (i) die Knoten in V aufzählen
- (ii) für zwei Knoten u, v testen, ob $u=v$
- (iii) für zwei Knoten u, v testen, ob $[u, v) \in E$

und zwar jeweils mit Speicherverbrauch $O(\log |V|)$ (Knotendarstellungsgröße)

Berechne

$\text{erreichbar}(s, v, L)$... gibt es in G einen gerichteten Pfad von s nach v der Länge höchstens L ?

Für Beweis von Lemma C, deterministische Lösung mit $O(\log^2|V|)$ Platzverbrauch

```
erreichbar( s , v, L ) = if L=0 then return (s=v)
                        if L=1 then return (s=v) or [s,v) ∈ E
                        else
                          for each m ∈ V do
                            if    erreichbar( s , m , ⌊L/2⌋ )
                               and erreichbar( m , v , ⌈L/2⌉ )
                            then return true
                          endfor
                        return false
```

Für Beweis von Lemma D, **nicht-deterministische** Lösung
mit $O(\log|V|)$ Platzverbrauch

Achtung: Das Schwierige ist, nicht-deterministisch zu zeigen, dass
 $\text{erreichbar}(s, v, L)$ **nicht** gilt.

$$R_s(L) = \{ x \in V \mid \text{erreichbar}(s, x, L) \}$$

$$N_s(L) = |R_s(L)|$$

Beh 0: Gegeben $x \in R_s(L)$, kann man nicht-det. mit $O(\log|V|)$ Platz zeigen, dass tatsächlich $x \in R_s(L)$.

Bew: rate und verifiziere Pfad von s nach x

$$R_s(L) = \{ x \in V \mid \text{erreichbar}(s, x, L) \}$$

$$N_s(L) = |R_s(L)|$$

Beh 0: Gegeben $x \in R_s(L)$, kann man nicht-det. mit $O(\log|V|)$ Platz zeigen, dass tatsächlich $x \in R_s(L)$.

Bew: rate und verifiziere Pfad von s nach x

Beh 1: Wenn $N_s(L)$ bekannt ist, kann man, gegeben $x \notin R_s(L)$, nicht-det. mit $O(\log|V|)$ Platz zeigen, dass tatsächlich $x \notin R_s(L)$.

Bew: rate $N_s(L)$ viele verschiedene $u \in V$, und verifiziere, dass $u \neq x$ und $u \in R_s(L)$ (**Beh 0!**).

Beh 2: Wenn $N_s(L-1)$ bekannt ist, kann man nicht-det. mit $O(\log|V|)$ Platz $N_s(L)$ berechnen.

Bew: $Z=0$

for each $y \in V$ do

rate ob $y \in R_s(L)$

wenn ja, dann verifiziere dies (Beh. 0) und $Z=Z+1$

wenn nein, dann verifiziere dies folgendermaßen:

verifiziere $y \notin R_s(L-1)$ (Beh. 1)

for each $x \in V$ do

verifiziere $x \notin R_s(L-1)$ (Beh. 1)

oder $[x,y] \notin E$

Für Beweis von Lemma D, nicht-deterministische Lösung
mit $O(\log|V|)$ Platzverbrauch

$\text{erreichbar}(s, v, L) =$ rate richtig ob ja oder nein
wenn ja, dann verifiziere dies (Beh. 0)
wenn nein:
 $N_s(0) = 0$
 for i from 1 to L do
 berechne $N_s(i)$ aus $N_s(i-1)$ (Beh. 2)
 mit $N_s(L)$ verifiziere, dass $v \notin R_s(L)$
 (Beh. 1)