

Komplexitätstheorie

Wie viele **Ressourcen** (Zeit, Speicherplatz) werden benötigt, um Sprachen zu entscheiden, Probleme zu lösen ?

Def: $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$f \geq_{\text{fü}} g$: für alle n , bis auf endlich viele
Ausnahmen gilt $f(n) \geq g(n)$

Def: $g \in \text{FÜP} = \{ h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid h \geq_{\text{fü}} 0 \}$

$O(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : f \leq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$o(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : f \leq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\Omega(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : f \geq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\omega(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : f \geq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$

- 1) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Laufzeit** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort w nach höchstens $f(|w|)$ Schritten hält.
- 2) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Platzverbrauch** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort w hält und dabei auf den Arbeitsbändern höchstens $f(|w|)$ Speicherzellen verwendet.
- 3) Eine nicht-deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Laufzeit** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort $w \in L(M)$ nach höchstens $f(|w|)$ Schritten hält.
- 4) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Platzverbrauch** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort $w \in L(M)$ hält und dabei auf den Arbeitsbändern höchstens $f(|w|)$ Speicherzellen verwendet.

DTIME(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Laufzeit** in **O(f)** entschieden werden können.

NTIME(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **nicht-deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Laufzeit** in **O(f)** entschieden werden können.

DSPACE(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Platzverbrauch** in **O(f)** entschieden werden können.

NSPACE(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **nicht-deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Platzverbrauch** in **O(f)** entschieden werden können.

Grundlegende Zusammenhänge zwischen Komplexitätsklassen

$$\begin{array}{ccc} \text{DTIME}(f) & \subseteq & \text{DSPACE}(f) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{NTIME}(f) & \subseteq & \text{NSPACE}(f) \end{array}$$

Beweis: jede deterministische TM ist auch eine nicht-deterministische TM
eine TM kann nicht mehr Zellen pro Band verwenden als sie
Rechenschritte macht

Hinweis:

TM-Modell: nicht-beschreibbares Eingabeband
 k Arbeitsbänder (k unabhängig von Eingabe)

Es wird nur der Platz auf den Arbeitsbändern verrechnet
 $\Rightarrow$ sublinearer Platzverbrauch ist möglich

Beispiel: $\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ liegt in $\text{DSPACE}(\log n)$

(verwende binären Zähler auf dem Arbeitsband !)

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Satz B: (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Satz B: (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Satz C: (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz)

$$\text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f^2(n))$$

k-Band Turingmaschine:

Eingabeband mit Lesekopf (kein Schreiben)

k Arbeitsbänder, jedes mit einem unabhängigen Lese-/Schreibkopf

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

Σ

Eingabealphabet

Γ

Arbeitsbandalphabet

$\#$

Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)

Q

Zustandsmenge (endlich)

$s \in Q$

Startzustand

$F \subset Q$

Endzustände

$\Delta \subset (Q \times \Sigma \times \Gamma^k) \times (Q \times \{L, B, R\} \times (\Gamma \times \{L, B, R\})^k)$ Rechenschrittregeln

Zustand

E-Band

A-Bänder

derzeitig

Zustand

E-Kopf

zu schreibendes

Symbol

A-Kopf-

bewegung

Konfiguration von TM **M**

Inhalt Eingabeband	Lesekopf Position	Zustand	Inhalt der k Arbeitsbänder	Positionen der k Lese/Schreibköpfe
-----------------------	----------------------	---------	-------------------------------	---------------------------------------

$$\Sigma^* \times \mathbb{N} \times Q \times (\Gamma^*)^k \times \mathbb{N}^k$$

Konfiguration von TM M

Inhalt Eingabeband	Lesekopf Position	Zustand	Inhalt der k Arbeitsbänder	Positionen der k Lese/Schreibköpfe
-----------------------	----------------------	---------	---------------------------------	---

$$\Sigma^* \times \mathbb{N} \times Q \times (\Gamma^*)^k \times \mathbb{N}^k$$

Konfigurationsgraph von TM M

Knoten: Konfigurationen $\Sigma^* \times \mathbb{N} \times Q \times (\Gamma^*)^k \times \mathbb{N}^k$

Kanten: $[C, C']$ wenn M in einem Rechenschritt
von Konf. C zu Konfig. C' kommt

Konfiguration von TM M

Inhalt Eingabeband	Lesekopf Position	Zustand	Inhalt der k Arbeitsbänder	Positionen der k Lese/Schreibköpfe
-----------------------	----------------------	---------	---------------------------------	---

$$\Sigma^* \times \mathbb{N} \times Q \times (\Gamma^*)^k \times \mathbb{N}^k$$

Konfigurationsgraph von TM M

Knoten: Konfigurationen $\Sigma^* \times \mathbb{N} \times Q \times (\Gamma^*)^k \times \mathbb{N}^k$

Kanten: $[C, C']$ wenn M in einem Rechenschritt
von Konf. C zu Konfig. C' kommt

TM M akzeptiert Eingabe $w \Leftrightarrow \exists$ gerichteten Pfad von
 $\text{init}(w)$ zu einer Endkonfiguration

Konfiguration von TM M bei Eingabe w und höchstens N Zellen/A-Band

Inhalt Eingabeband	Lesekopf Position	Zustand	Inhalt der k Arbeitsbänder	Positionen der k Lese/Schreibköpfe
-----------------------	----------------------	---------	---------------------------------	---

$$\{w\} \times \{1, \dots, |w|\} \times Q \times (\Gamma^N)^k \times \{1, \dots, N\}^k$$

$KG_M(w, N)$ Konfigurationsgraph von TM M bei Eingabe w und höchstens N Zellen/A-Band

Knoten: Konfigurationen $\{1, \dots, |w|\} \times Q \times (\Gamma^N)^k \times \{1, \dots, N\}^k$

Kanten: $[C, C']$ wenn M in einem Rechenschritt von Konf. C zu Konfig. C' kommt

Anzahl der Knoten: $\leq n \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{kN} \cdot N^k$

$n = |w|$

Anzahl der Kanten: $\leq \alpha \cdot n \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{kN} \cdot N^k$

α eine von M abh. Konstante

$KG_M(w, N)$ Konfigurationsgraph von **TM M** bei Eingabe **w** und
höchstens **N** Zellen/A-Band
 $n=|w|$

Knoten: Konfigurationen

Kanten: $[C, C']$ wenn **M** in einem Rechenschritt
von Konf. **C** zu Konfig. **C'** kommt

Anzahl der Knoten: $\leq n \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{kN} \cdot N^k \leq A^N$ (falls $N \geq \log_2 n$)
 A eine von **M**
abh. Konstante

Eingrad und Ausgrad jedes Knoten $\leq \alpha$ α eine von **M**
abh. Konstante

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Satz A: (Verhältnis zwischen det. Zeit und Platz)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Lemma A: (i) $L \in \text{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSPACE}(f(n))$
(ii) $L \in \text{DSPACE}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$
für eine von L abh.
Konstante A

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Lemma A: (i) $L \in \text{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSpace}(f(n))$
(ii) $L \in \text{DSpace}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$
für eine von L abh.
Konstante A

Bew: (i) trivial

(ii) M det. TM für L mit Platzverbrauch $f(n)$

w Eingabe für M $n=|w|, N=f(n) \quad (\geq \log_2 n)$

Berechnung von M entspricht Pfad durch $\text{KG}_M(w, N)$

$\text{KG}_M(w, N)$ hat höchstens A^N Knoten

$\Rightarrow M$ macht auf Eingabe w höchstens A^N viele Schritte (sonst Endlosloop !)

$\Rightarrow M$ entscheidet L in Zeit $A^{f(n)} \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

Satz B: (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

Satz B: (Verhältnis zwischen deterministischer und nicht-det. Zeit)

$$\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\gamma(n)f(n)})$$

Lemma B: (i) $L \in \text{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{NTIME}(f(n))$

(ii) $L \in \text{NTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$

für eine von L abh.
Konstante A

Sei $f(n) \geq \log_2 n$

Lemma B: (i) $L \in \text{DTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{NTIME}(f(n))$

(ii) $L \in \text{NTIME}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$

für eine von L abh.

Konstante A

Bew: (i) trivial

(ii) M nicht-det. TM für L mit Zeitverbrauch und daher Platzverbrauch $f(n)$
 w Eingabe für M $n=|w|$, $N=f(n)$ ($\geq \log_2 n$)

Berechnung von M entspricht Pfad durch $KG_M(w, N)$
von $\text{init}(w)$ zu einer Endkonfiguration

$KG_M(w, N)$ hat höchstens A^N Knoten und $O(A^N)$ Kanten

$\Rightarrow$ det. TM M' macht Tiefensuche (DFS) in $KG_M(w, N)$ und testet, ob
eine Endkonfiguration von $\text{init}(w)$ erreichbar; braucht Zeit $O(\# \text{ Kanten})$

$\Rightarrow M'$ entscheidet L in Zeit $O(A^{f(n)}) \Rightarrow L \in \text{DTIME}(A^{f(n)})$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

Satz C: (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz)

$$\text{DSpace}(f(n)) \subseteq \text{NSpace}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f^2(n))$$

Sei $\gamma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig langsam wachsend,
aber nicht-fallend und $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = \infty$
z.B. $\gamma(n) = \log \log \log \log n$

Sei $f(n) \geq \log_2 n$ (und so, dass es mit $O(f(n))$ Platz berechnet werden kann)

Satz C: (Verhältnis zwischen deterministischem und nicht-det. Platz)

$$\text{DSpace}(f(n)) \subseteq \text{NSpace}(f(n)) \subseteq \text{DSpace}(f^2(n))$$

Lemma C: (i) $L \in \text{DSpace}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{NSpace}(f(n))$
(ii) $L \in \text{NSpace}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSpace}(f(n)^2)$

Lemma C: (i) $L \in \text{DSpace}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{NSpace}(f(n))$
(ii) $L \in \text{NSpace}(f(n)) \Rightarrow L \in \text{DSpace}(f(n)^2)$

Bew: (i) trivial

(ii) M nicht-det. TM für L mit daher Platzverbrauch $f(n)$

w Eingabe für M $n=|w|$, $N=f(n)$ ($\geq \log_2 n$)

Berechnung von M entspricht Pfad durch $KG_M(w, N)$
von $\text{init}(w)$ zu einer Endkonfiguration

$KG_M(w, N)$ hat höchstens A^N Knoten und $O(A^N)$ Kanten

$\Rightarrow$ Brauche det. TM M' (deterministischen Algorithmus) zum Testen,
ob in $KG_M(w, N)$ eine Endkonfiguration von $\text{init}(w)$ erreichbar ist;

Dieser Algorithmus soll wenig Platz brauchen !!