

Post'sche Korrespondenzproblem

Reservoir von k Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich **oben** und unten das gleiche Wort ergibt ?

1	011	10	011
101	11	00	11

Post'sche Korrespondenzproblem PCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1, \dots, k\}^*$ mit $\mathbf{X}[I] = Y[I]$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\mathbf{X}[I] = \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} \cdots \mathbf{x}_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Beweis:

$$\text{UNIV} \preceq \text{WORT} \preceq \text{MPCP} \preceq \text{PCP},$$

also

$$\text{UNIV} \preceq \text{PCP}.$$

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

- 1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- 2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?
- 4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- 5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

- 1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- 2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?
- 4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- 5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: *Gilt* $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

S_X kontextfrei, denn generiert durch Grammatik mit Regeln

$$S \rightarrow i S x_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$$S \rightarrow i \$ x_i \quad 1 \leq i \leq k$$

analog S_Y kontextfrei.

S_X und S_Y sind sogar **deterministisch** kontextfrei.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

$S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ bedeutet es gibt ein $I \in \{1, \dots, k\}^+$ mit

$$I^R \$ X[I] = I^R \$ Y[I] \text{ , also } X[I] = Y[I] \text{ ,}$$

also entscheiden, ob $S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ würde das PCP lösen.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$
 $S_Y = \{ J^R Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

PCP hat keine Lösung $\Rightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset$, also $S_X \cap S_Y$ endlich

PCP hat Lösung $I \Rightarrow I^n$ ist Lösung für jedes $n > 0$
 $\Rightarrow (I^n)^R X[I^n] = (I^n)^R Y[I^n]$ jedes $n > 0$
 $\Rightarrow S_X \cap S_Y$ ist **nicht** endlich.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$
 $S_Y = \{ J^R Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X

G_2 kontextfreie Grammatik für $\overline{S_Y}$

(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)

$$L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\text{PCP unlösbar}}_{\text{unentscheidbar}}$$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$
 $S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für S_X

G_2 kontextfreie Grammatik für S_Y

(geht, da S_Y deterministisch kontextfrei)

G kontextfreie Grammatik für $S_X \cup S_Y$

$L(G_2) = L(G) \Leftrightarrow L(G_1) \subset L(G_2) \Leftrightarrow S_X \subset \overline{S_Y} \Leftrightarrow S_X \cap S_Y = \emptyset \Leftrightarrow \underbrace{\text{PCP unlösbar}}_{\text{unentscheidbar}}$

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?

3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?

4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?

5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $L_X = \{ I^R \# K \$ K^R \# X[I] \mid I, K \in \{1, \dots, k\}^+ \}$
 $S_Y = \{ J^R \# J \$ H^R \# Y[H] \mid J, H \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

G_1 kontextfreie Grammatik für L_X

G_2 kontextfreie Grammatik für L_Y

PCP unlösbar $\Rightarrow L_X \cap L_Y = \emptyset \Rightarrow L_X \cap L_Y$ ist kontextfrei

PCP lösbar $\Rightarrow L_X \cap L_Y$ enthält Worte der Form $(I^n)^R \# I^n \$ (I^n)^R \# X[I^n]$
für alle $n > 0$
 $\Rightarrow L_X \cap L_Y$ ist nicht kontextfrei

Komplexitätstheorie

Wie viele **Ressourcen** (Zeit, Speicherplatz) werden benötigt, um Sprachen zu entscheiden, Probleme zu lösen ?

Def: $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$f \geq_{\text{fü}} g$: für alle n , bis auf endlich viele
Ausnahmen gilt $f(n) \geq g(n)$

Def: $g \in \text{FÜP} = \{ h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid h \geq_{\text{fü}} 0 \}$

$O(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : f \leq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$o(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : f \leq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\Omega(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : f \geq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\omega(g) = \{ f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : f \geq_{\text{fü}} c \cdot g \}$

$\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$

- 1) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Laufzeit** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort w nach höchstens $f(|w|)$ Schritten hält.
- 2) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Platzverbrauch** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort w hält und dabei auf den Arbeitsbändern höchstens $f(|w|)$ Speicherzellen verwendet.
- 3) Eine nicht-deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Laufzeit** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort $w \in L(M)$ nach höchstens $f(|w|)$ Schritten hält.
- 4) Eine deterministische Turingmaschine M hat **worst-case Platzverbrauch** $f(n)$, wenn M für jedes Eingabewort $w \in L(M)$ hält und dabei auf den Arbeitsbändern höchstens $f(|w|)$ Speicherzellen verwendet.

DTIME(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Laufzeit** in **O(f)** entschieden werden können.

NTIME(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **nicht-deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Laufzeit** in **O(f)** entschieden werden können.

DSPACE(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Platzverbrauch** in **O(f)** entschieden werden können.

NSPACE(f) ist die Familie aller Sprachen, die durch irgendeine **nicht-deterministische** Turingmaschine mit worst-case **Platzverbrauch** in **O(f)** entschieden werden können.