

Post'sche Korrespondenzproblem

Reservoir von k Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich **oben** und unten das gleiche Wort ergibt ?

1	011	10	011
101	11	00	11

Post'sche Korrespondenzproblem PCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1, \dots, k\}^*$ mit $\mathbf{X}[I] = Y[I]$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\mathbf{X}[I] = \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} \cdots \mathbf{x}_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Modifiziertes Post'sche Korrespondenzproblem MPCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1, \dots, k\}^*$ mit $\mathbf{X}[I] = Y[I]$
und $i_1 = 1$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\mathbf{X}[I] = \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} \cdots \mathbf{x}_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Beh: $\text{MPCP}_{\Sigma} \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beh: $\text{MPCP}_{\Sigma} \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

(k , $((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k))$)

Beh: $\text{MPCP}_\Sigma \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

$$(\textcolor{blue}{k}, ((\textcolor{red}{x}_1, y_1), \dots, (\textcolor{red}{x}_k, y_k))) \rightarrow (\textcolor{blue}{k}+2, ((\bar{\textcolor{red}{x}}_1, \hat{y}_1), (\acute{\textcolor{red}{x}}_1, \grave{y}_1), \dots, (\acute{\textcolor{red}{x}}_k, \grave{y}_k), (\textcolor{red}{\$}, \# \textcolor{red}{\$})))$$

Beh: $\text{MPCP}_{\Sigma} \preceq \text{PCP}_{\Sigma \cup \{\#, \$\}}$

Beweis:

$$(\textcolor{blue}{k}, ((\textcolor{red}{x}_1, y_1), \dots, (\textcolor{red}{x}_k, y_k))) \rightarrow (\textcolor{blue}{k+2}, ((\bar{\textcolor{red}{x}}_1, \hat{y}_1), (\acute{\textcolor{red}{x}}_1, \grave{y}_1), \dots, (\acute{\textcolor{red}{x}}_k, \grave{y}_k), (\textcolor{red}{\$}, \#\$)))$$

$$a = a_1 a_2 \cdots a_m$$

$$\bar{a} = \#a_1\#a_2\#\cdots\#a_m\#$$

$$\acute{a} = a_1\#a_2\#\cdots\#a_m\#$$

$$\grave{a} = \#a_1\#a_2\#\cdots\#a_m$$

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G) \$ \text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G)\$ \text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

Beh: $\text{UNIV} \preceq \text{WORT}$

WORT: Das Wortproblem

Gegeben: Eine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$

Frage: Ist $w \in L(G)$? Also, wird w von G generiert?

Als Sprache ausgedrückt:

$$\text{WORT} = \{ \text{cod}(G) \$ \text{cod}(w) \mid w \in L(G) \}$$

Beh: $\text{UNIV} \preceq \text{WORT}$

Beweis schon bei Äquivalenz von TM und Grammatiken gegeben.

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma, V, S, P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma, V, S, P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

$$w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S$$

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

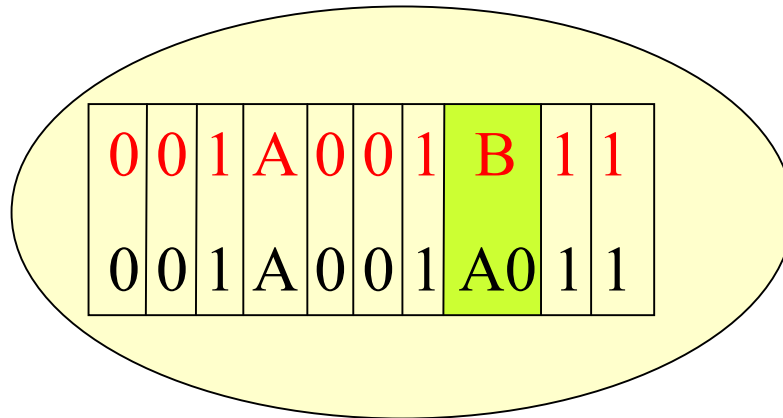
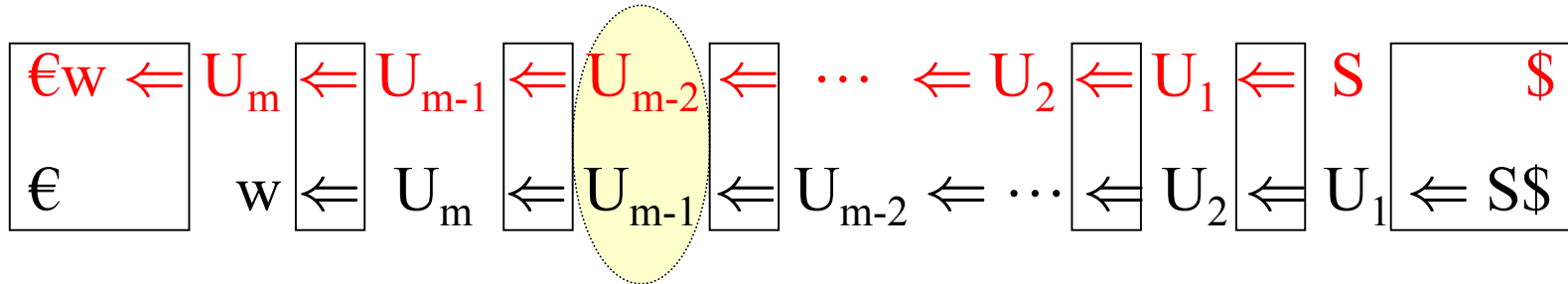
Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma, V, S, P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.

$$\text{\textcolor{red}{€}}w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S \quad \text{\textcolor{red}{\$}}$$

$$\text{\textcolor{black}{€}} \quad w \Leftarrow U_m \Leftarrow U_{m-1} \Leftarrow U_{m-2} \Leftarrow \cdots \Leftarrow U_2 \Leftarrow U_1 \Leftarrow S\$$$

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

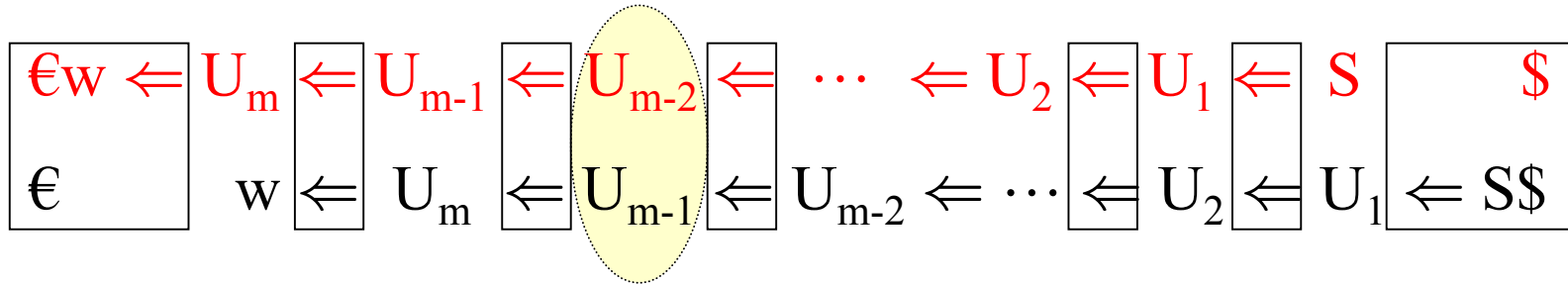
Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.



Bei Produktion
 $B \rightarrow A00$
in P

Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

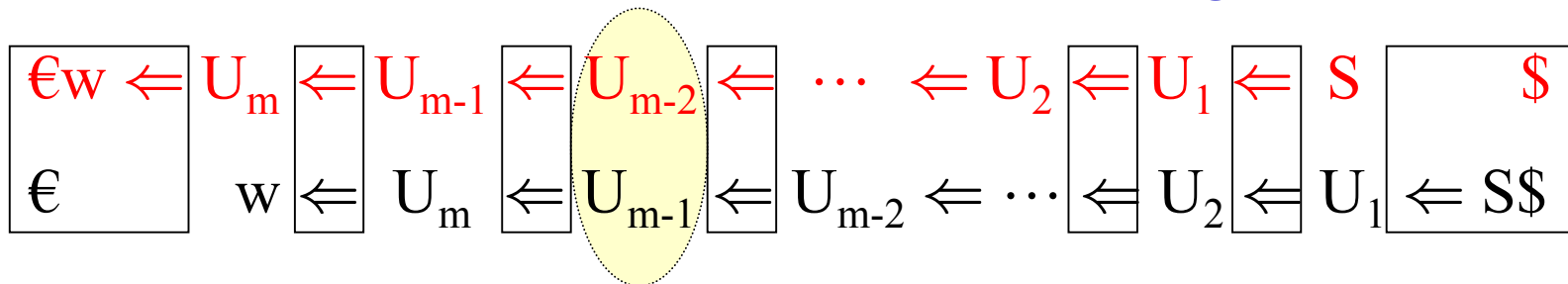
Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.



Grammatik $G = (\{a_1, \dots, a_s\} , \{B_1, \dots, B_t\} , B_1, \{ \alpha_1 \rightarrow \beta_1, \dots, \alpha_r \rightarrow \beta_r \})$, Wort w

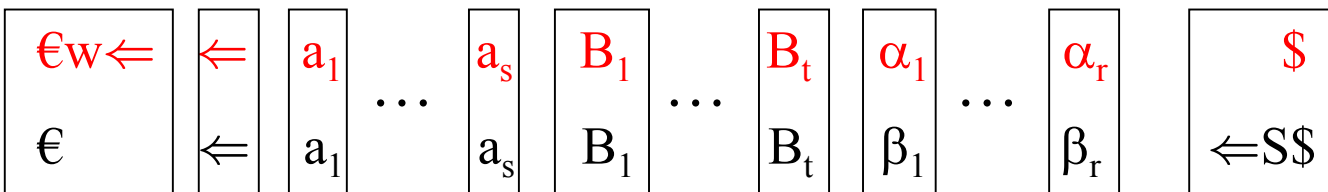
Beh: $\text{WORT} \preceq \text{MPCP}$

Beweisidee: Gegeben Grammatik $G=(\Sigma,V,S,P)$ und Wort w ,
baue MPCP, dessen Lösung eine Derivation $S \Rightarrow_G w$ darstellt.



Grammatik $G = (\{a_1, \dots, a_s\} , \{B_1, \dots, B_t\} , B_1, \{ \alpha_1 \rightarrow \beta_1, \dots, \alpha_r \rightarrow \beta_r \})$, Wort w

MPCP



Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Satz: PCP ist nicht entscheidbar.

Beweis:

$$\text{UNIV} \preceq \text{WORT} \preceq \text{MPCP} \preceq \text{PCP},$$

also

$$\text{UNIV} \preceq \text{PCP}.$$

Da UNIV unentscheidbar, ist also auch PCP unentscheidbar.

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

- 1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- 2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?
- 4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- 5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Satz: Die folgenden Probleme sind alle unentscheidbar:

Gegeben: kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2

- 1) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- 2) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist endlich ?
- 3) Frage: Gilt $L(G_1) \subset L(G_2)$?
- 4) Frage: Gilt $L(G_1) = L(G_2)$?
- 5) Frage: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2)$ ist kontextfrei ?

Anmerkung: Die analogen Fragen für reguläre Sprachen sind alle entscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

S_X kontextfrei, denn generiert durch Grammatik mit Regeln

$$S \rightarrow i S x_i \quad 1 \leq i \leq k$$

$$S \rightarrow i \$ x_i \quad 1 \leq i \leq k$$

analog S_Y kontextfrei.

S_X und S_Y sind sogar **deterministisch** kontextfrei.

Beh.: Gilt $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$? ist unentscheidbar.

Beweis: $(k, ((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)))$ Instanz von PCP

Betrachte Sprachen $S_X = \{ I^R \$ X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$S_Y = \{ J^R \$ Y[J] \mid J \in \{1, \dots, k\}^+ \}$

$$X[(i_1, \dots, i_m)] = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$$

$S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ bedeutet es gibt ein $I \in \{1, \dots, k\}^+$ mit

$$I^R \$ X[I] = I^R \$ Y[I] \text{ , also } X[I] = Y[I] \text{ ,}$$

also entscheiden ob $S_X \cap S_Y \neq \emptyset$ würde das PCP lösen.