

Reduktionen

Def.: Man sagt

“Sprache $A \subset \Sigma^*$ reduziert sich auf Sprache $B \subset \Gamma^*$ ”

“ A ist leichter als B ”

und schreibt

$A \preceq B$,

wenn es eine überall berechenbare Funktion $F: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt,
sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt

$$x \in A \Leftrightarrow F(x) \in B$$

Satz: Wenn $A \preceq B$ dann gilt:

(i) B entscheidbar $\Rightarrow A$ entscheidbar

(ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht entscheidbar

Satz: Wenn $A \preceq B$ dann gilt:

(i) B entscheidbar $\Rightarrow A$ entscheidbar

(ii) A nicht entscheidbar $\Rightarrow B$ nicht entscheidbar

Anwendung: $UNIV$ ist nicht entscheidbar, denn

$SAM \preceq UNIV$, und SAM nicht entscheidbar.

$$SAM = \{ w \in \{0,1\}^* \mid w \in L(M_w) \}$$

$$UNIV = \{ w\$x \in \{0,1\}^*\$ \{0,1\}^* \mid \text{decode}(x) \in L(M_w) \}$$

$$w \xrightarrow{F} w\$cod(w)$$

$$w \in SAM \Leftrightarrow w\$cod(w) \in UNIV$$

u beliebiger, fester String

$$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

u beliebiger, fester String

$$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

Beweis: $UNIV \preceq ACC_u$ (und $UNIV$ ist nicht entscheidbar)

Reduktionsfunktion: $w\$x$ wird umgewandelt in Beschreibung einer TM $Z_{w,x}$

$Z_{w,x}$: Eingabe y

1. Lasse M_w mit Eingabe $decod(x)$ laufen.
2. If $y=u$ then akzeptiere, sonst divergiere

u beliebiger, fester String

$$ACC_u = \{ w \in \{0,1\}^* \mid u \in L(M_w) \}$$

Satz: Für jedes u ist ACC_u **nicht** entscheidbar.

Beweis: $UNIV \preceq ACC_u$ (und $UNIV$ ist nicht entscheidbar)

Reduktionsfunktion: $w\$x$ wird umgewandelt in Beschreibung einer TM $Z_{w,x}$

$Z_{w,x}$: Eingabe y

1. Lasse M_w mit Eingabe $decode(x)$ laufen.
2. If $y=u$ then akzeptiere, sonst divergiere

$w\$x \in UNIV \Rightarrow M_w$ akzeptiert $decode(x) \Rightarrow Z_{w,x}$ akzeptiert $u \Rightarrow cod(Z_{w,x}) \in ACC_u$

$w\$x \notin UNIV \Rightarrow M_w$ akzept. nicht $decode(x) \Rightarrow Z_{w,x}$ akzept. u nicht $\Rightarrow cod(Z_{w,x}) \notin ACC_u$

Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

ist nicht entscheidbar.

Satz von Rice:

$\mathcal{RE}$ Menge aller rekursiv aufzählbaren Sprachen

Für jedes $\mathcal{S} \subset \mathcal{RE}$ mit $\emptyset \neq \mathcal{S} \neq \mathcal{RE}$ gilt

$$C(\mathcal{S}) = \{ w \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

ist nicht entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Alle (nicht trivialen) Eigenschaften von Turingmaschinen, die sich durch die **akzeptierte Sprache** ausdrücken lassen, sind **nicht** entscheidbar.

Beispiele:

$$\{ w \mid \varepsilon \in L(M_w) \}$$

$$\{ w \mid L(M) = \emptyset \}$$

$$\{ w \mid L(M) \text{ ist endlich} \}$$

$$\{ w \mid L(M) \text{ ist kontextfrei} \}$$

alle nicht entscheidbar.

Post'sche Korrespondenzproblem

Reservoir von k Spielkartentypen

1	10	011	10
101	00	11	111

Frage: Kann man Spielkarten (mit möglichen Wiederholungen) so nebeneinanderlegen, dass sich **oben** und unten das gleiche Wort ergibt ?

1	011	10	011
101	11	00	11

Post'sche Korrespondenzproblem PCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1, \dots, k\}^*$ mit $\mathbf{X}[I] = Y[I]$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\mathbf{X}[I] = \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} \cdots \mathbf{x}_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$

Modifiziertes Post'sche Korrespondenzproblem MPCP_Σ

Gegeben: $k \in \mathbb{N}$, $((\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_k, y_k)) \in (\Sigma^*)^{2k}$

Frage: Gibt es $I \in \{1, \dots, k\}^*$ mit $\mathbf{X}[I] = Y[I]$
und $i_1 = 1$

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$\mathbf{X}[I] = \mathbf{x}_{i_1} \mathbf{x}_{i_2} \cdots \mathbf{x}_{i_n}$$

$$Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$$