

Funktion $f: \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ berechenbar :

Es gibt Turing Maschine M , die für jedes $x \in \Sigma^*$
bei Eingabe x auf dem Eingabeband
mit Ausgabe $f(x) \in \Gamma^*$ auf dem Ausgabeband
stoppt.

Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ **berechenbar** :

Es gibt Turing Maschine M , die für jedes $x \in \Sigma^*$
bei Eingabe x auf dem Eingabeband
mit Ausgabe $f(x) \in \Gamma^*$ auf dem Ausgabeband
stoppt.

Funktion $f : A \rightarrow B$ **berechenbar** :

Es gibt Turing Maschine M , die für jedes $a \in A$
bei Eingabe $\text{cod}(a)$ auf dem Eingabeband
mit Ausgabe $\text{cod}(f(a))$ auf dem Ausgabeband
stoppt.

Die folgenden sind äquivalent für $A \subseteq \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit $L(M) = A$
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A ist rekursiv aufzählbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

$A \subset \Sigma^*$ heißt **semi-entscheidbar**, wenn die positive charakteristische Funktion von A berechenbar ist.

$$\chi_A^+ : \Sigma^* \rightarrow \{0,1\} : \chi_A^+(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \text{undef} & x \notin A \end{cases}$$

Die folgenden sind äquivalent für $A \subseteq \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit $L(M) = A$
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A ist rekursiv aufzählbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

$A \subset \Sigma^*$ heißt **rekursiv aufzählbar**, wenn es eine überall berechenbare Funktion $F : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma^*$ gibt , sodass

$$A = \{ F(0), F(1), F(2) , \dots \} = \{ F(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Die Funktion F “zählt die Menge A auf”

Die folgenden sind äquivalent für $A \subseteq \Sigma^*$:

- A ist Turing akzeptierbar
- Es gibt TM M mit $L(M) = A$
- A ist semi-entscheidbar
- χ_A^+ ist berechenbar
- A ist rekursiv aufzählbar
- A wird von Typ-0 Grammatik generiert
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

$A \subset \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, wenn die charakteristische Funktion von A berechenbar ist.

$$\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0,1\} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$A \subset \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, wenn die charakteristische Funktion von A berechenbar ist.

$$\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0,1\} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Satz:

A ist entscheidbar $\Leftrightarrow$ A ist semi-entscheidbar und $\overline{A}$ ist semi-entscheidbar

Kodierung von Turing Maschinen als binäre Strings

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

Σ Eingabealphabet

$\Gamma \supset \Sigma$ Bandalphabet

$\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)

Q Zustandsmenge (endlich)

$s \in Q$ Startzustand

$F \subset Q$ Endzustände

$\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\})$ Rechenschrittregeln

derzeitiger
Zustand

derzeitig
gelesenes
Symbol

neuer
Zustand

geschriebenes
Symbol

Kopfbewegung
L = links R = rechts
B = bleibe

Kodierung von Turing Maschinen als binäre Strings

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

o.B.d.A

$$\Sigma = \{ a_1, \dots, a_t \}$$

$$\Gamma = \{ a_1, \dots, a_t, \dots, a_g \} \cup \{ \# \}$$

$$Q = \{ q_1, \dots, q_m \}$$

$$s = q_1$$

$$F = \{ q_2 \}$$

$$\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\}) \quad L = \mu_1, B = \mu_2, R = \mu_3$$

$$\Delta = \{ \delta_1, \dots, \delta_D \}$$

Kodierung von Turing Maschinen als binäre Strings

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

o.B.d.A

$$\Sigma = \{ a_1, \dots, a_t \}$$

$$\Gamma = \{ a_1, \dots, a_t, \dots, a_g \} \cup \{ \# \}$$

$$Q = \{ q_1, \dots, q_m \}$$

$$s = q_1$$

$$F = \{ q_2 \}$$

$$\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\}) \quad L = \mu_1, B = \mu_2, R = \mu_3$$

$$\Delta = \{ \delta_1, \dots, \delta_D \}$$

$$\text{cod}(M) = \text{cod}(\delta_1) \text{cod}(\delta_2) \dots \text{cod}(\delta_D)$$

Kodierung von Turing Maschinen als binäre Strings

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

o.B.d.A

$$\Sigma = \{ a_1, \dots, a_t \}$$

$$\Gamma = \{ a_1, \dots, a_t, \dots, a_g \} \cup \{ \# \}$$

$$Q = \{ q_1, \dots, q_m \}$$

$$s = q_1$$

$$F = \{ q_2 \}$$

$$\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\}) \quad L = \mu_1, B = \mu_2, R = \mu_3$$

$$\Delta = \{ \delta_1, \dots, \delta_D \}$$

$$\text{cod}(M) = \text{cod}(\delta_1) \text{cod}(\delta_2) \dots \text{cod}(\delta_D)$$

$$\text{cod}((q_{\textcolor{red}{h}}, a_{\textcolor{red}{i}}, q_{\textcolor{red}{j}}, a_{\textcolor{red}{k}}, \mu_{\textcolor{red}{p}})) = 0 \textcolor{red}{1}^h 0 \textcolor{red}{1}^i 0 \textcolor{red}{1}^j 0 \textcolor{red}{1}^k 0 \textcolor{red}{1}^p 0$$

Dekodieren: binäre Strings als Turing Maschinen interpretieren

$$w \in \{0,1\}^*$$

$$M_w = \begin{cases} M \text{ mit } \text{cod}(M)=w & \text{falls } w \text{ eine legale TM Kodierung} \\ \text{TM die nichts akzeptiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Dekodieren: binäre Strings als Turing Maschinen interpretieren

$$w \in \{0,1\}^*$$

$$M_w = \begin{cases} M \text{ mit } \text{cod}(M)=w & \text{falls } w \text{ eine legale TM Kodierung} \\ \text{TM die nichts akzeptiert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $M_{\text{cod}(M)} \approx M$

Kodieren beliebiger Strings als binäre Strings

$$\Sigma = \{a_1, \dots, a_t\}$$

$$x \in \Sigma^* \text{ mit } x = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} \dots a_{i_n}$$

$$\text{cod}(x) = 0^{i_1} 1^{i_2} 0^{i_3} 1^{i_4} \dots$$

Dekodieren: Interpretation binärer Strings als allgemeine Strings

$$\text{decode}(0^{i_1} 1^{i_2} 0^{i_3} 1^{i_4} \dots) = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} \dots$$

$$\text{decode}(1^{i_1} 0^{i_2} 1^{i_3} 0^{i_4} \dots) = a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3} a_{i_4} \dots$$

Es gilt: $\text{decode}(\text{code}(x)) = x$