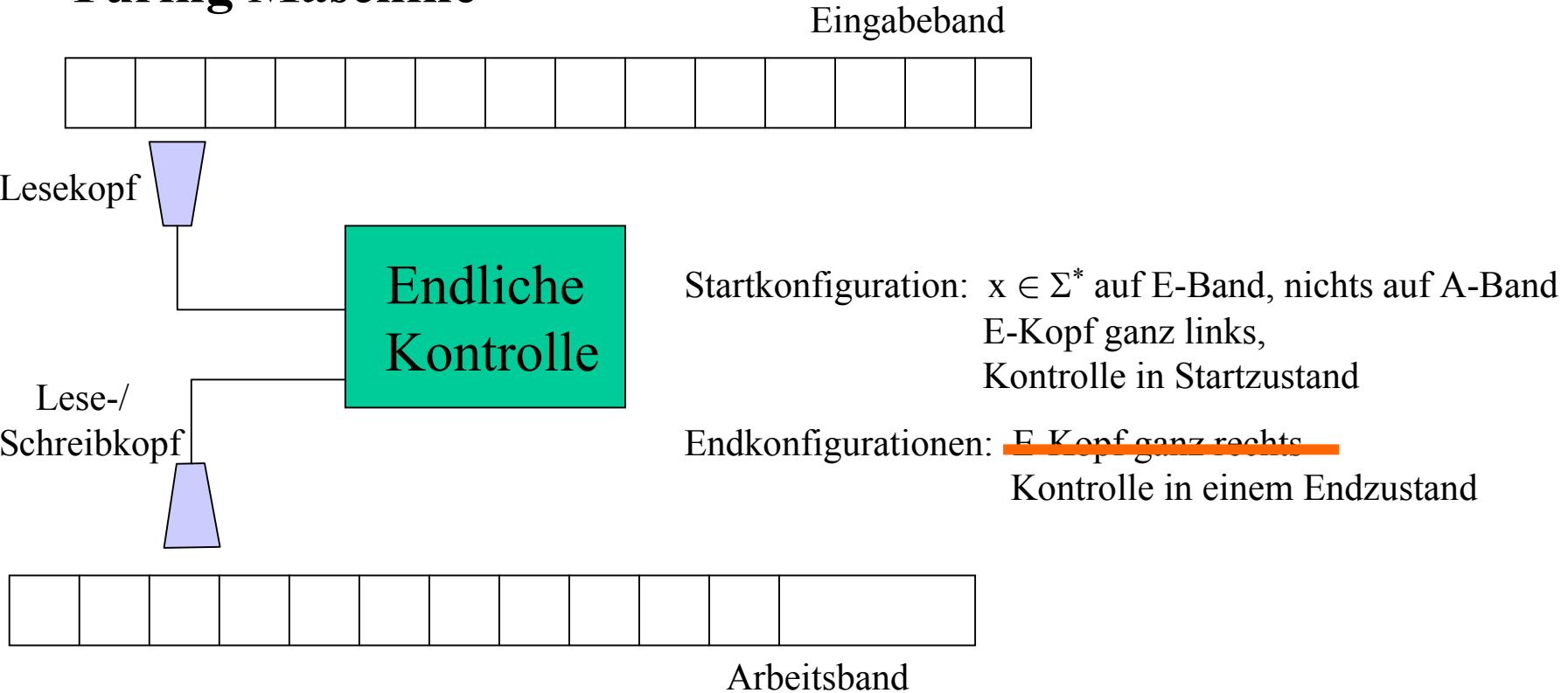


Turing Maschine

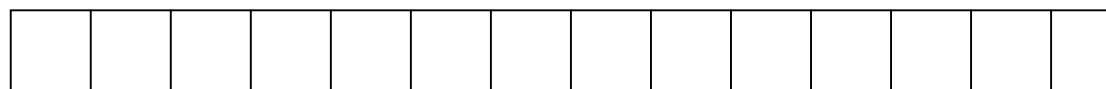


Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand	gelesenes E-Symbol	gelesenes A-Symbol	→	neuer Zustand	E-Kopf nach rechts	schreibe A-Symbol	bewege A-Kopf
------------------------	-----------------------	-----------------------	---	------------------	-----------------------	----------------------	------------------

Einfache Turing Maschine

Eingabeband/~~Arbeitsband~~



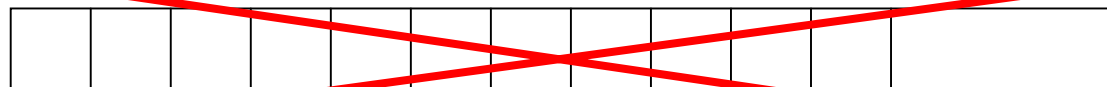
Lesekopf
~~Schreibkopf~~

Endliche
Kontrolle

Startkonfiguration: $x \in \Sigma^*$ auf E-Band, ~~nichts auf A-Band~~
E-Kopf ganz links,
Kontrolle in Startzustand

~~Les-/
Schreibkopf~~

Endkonfigurationen: ~~E-Kopf ganz rechts~~
Kontrolle in einem Endzustand



~~Arbeitsband~~

Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger
Zustand

gelesenes
~~E-Symbol~~

~~gelesenes
A-Symbol~~



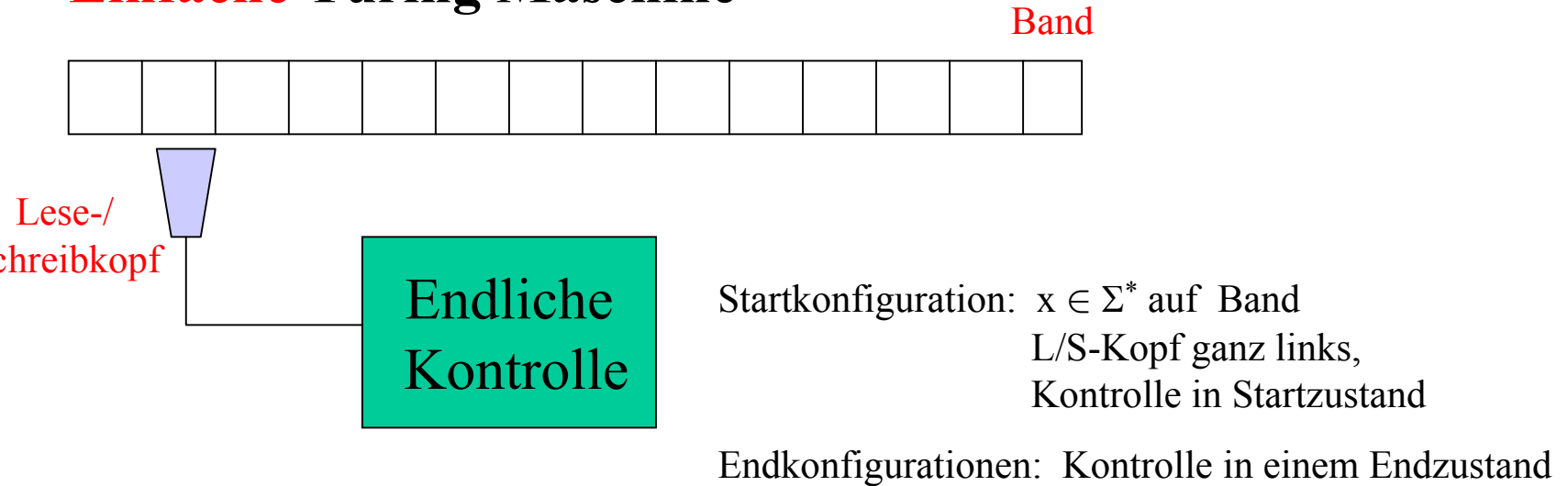
neuer
Zustand

~~E-Kopf
nach rechts~~

schreibe
~~A-Symbol~~

bewege
~~A-Kopf~~

Einfache Turing Maschine



Rechenschrittregeln: (endlich viele)

derzeitiger Zustand	gelesenes Symbol	→	neuer Zustand	schreibe Symbol	bewege L/S-Kopf
------------------------	---------------------	---	------------------	--------------------	--------------------

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

Σ Eingabealphabet

$\Gamma \supset \Sigma$ Bandalphabet

$\# \in \Gamma \setminus \Sigma$ Leerzeichen (Inhalt von nicht initialisierten Zellen)

Q Zustandsmenge (endlich)

$s \in Q$ Startzustand

$F \subset Q$ Endzustände

$\Delta \subset (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{L, B, R\})$ Rechenschrittregeln

derzeitiger
Zustand

derzeitig
gelesenes
Symbol

neuer
Zustand

geschriebenes
Symbol

Kopfbewegung
L = links R = rechts
B = bleibe

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

Konfigurationsraum für M : $K_M = \Gamma^* \mathbf{Q} \Gamma^+$

$A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \mathbf{q} A_i \cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1 \cdots A_n$
Zustand ist $\mathbf{q}$
S/L-Kopf über A_i

Achtung: noch nicht benutzte Bandzellen sind in
Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x \in \Sigma^+$: $\text{init}(x) = \mathbf{s} x$
für $x \in \Sigma^0$: $\text{init}(\varepsilon) = \mathbf{s} \#$

Endkonfigurationen: $\Phi = \Gamma^* \mathbf{F} \Gamma^+$

Formale Spezifikation einer einfachen Turing Maschine

$$M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$$

Konfigurationsraum für M : $K_M = \Gamma^* Q \Gamma^+$

$A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \text{ } q \text{ } A_i \cdots A_n$ bedeutet: Bandinhalt ist $A_1 \cdots A_n$
Zustand ist q
S/L-Kopf über A_i

Achtung: noch nicht benutzte Bandzellen sind in
Konfiguration nicht kodiert.

Anfangskonfiguration für $x \in \Sigma^+$: $\text{init}(x) = s x$
für $x \in \Sigma^0$: $\text{init}(\varepsilon) = s \#$

Alternative Endkonfigurationen: $\Phi_\varepsilon = \#^* F \#^+$

Am Ende
Bandinhalt löschen

Rechenschrittrelation $\vdash_{\mathbf{M}}$ auf $K_{\mathbf{M}}$

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \textcolor{red}{p} A_i A_{i+1} \cdots A_n \\ \vdash_{\mathbf{M}} \\ A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \textcolor{red}{q} C A_{i+1} \cdots A_n \end{array} \quad \text{g.d.w } (\textcolor{red}{p}, A_i, \textcolor{red}{q}, C, B) \in \Delta$$

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \textcolor{red}{p} A_i A_{i+1} \cdots A_n \\ \vdash_{\mathbf{M}} \\ A_1 A_2 \cdots \textcolor{red}{q} A_{i-1} C A_{i+1} \cdots A_n \end{array} \quad \text{g.d.w } (\textcolor{red}{p}, A_i, \textcolor{red}{q}, C, L) \in \Delta$$

$$\begin{array}{c} A_1 A_2 \cdots A_{i-1} \textcolor{red}{p} A_i A_{i+1} A_n \\ \vdash_{\mathbf{M}} \\ A_1 A_2 \cdots A_{i-1} C \textcolor{red}{q} A_{i+1} \cdots A_n \end{array} \quad \text{g.d.w } (\textcolor{red}{p}, A_i, \textcolor{red}{q}, C, R) \in \Delta$$

Rechenschrittrelation $\vdash_{\mathbf{M}}$ auf $K_{\mathbf{M}}$

(neue Bandzellen werden zum ersten Mal benutzt)

$$\begin{array}{c} \mathbf{p} \ A_1 A_2 \cdots A_n \\ \vdash_{\mathbf{M}} \\ \mathbf{q} \ #C A_2 \cdots A_n \end{array} \quad \text{g.d.w } (\mathbf{p}, A_1, \mathbf{q}, C, L) \in \Delta$$

$$\begin{array}{c} A_1 \cdots A_{n-1} \ \mathbf{p} \ A_n \\ \vdash_{\mathbf{M}} \\ A_1 \cdots A_{n-1} C \ \mathbf{q} \ # \end{array} \quad \text{g.d.w } (\mathbf{p}, A_n, \mathbf{q}, C, R) \in \Delta$$

Rechenrelation $\vdash_{\mathbf{M}}^*$ auf $K_{\mathbf{M}}$: reflexive, transitive Hülle von $\vdash_{\mathbf{M}}$

TM $\mathbf{M}$ akzeptiert Eingabe $x \in \Sigma^*$

g.d.w.

$\text{init}(x) \vdash_{\mathbf{M}}^* \phi$ für irgendein $\phi \in \Phi$

$L(\mathbf{M}) = \{ x \in \Sigma^* \mid \mathbf{M} \text{ akzeptiert } x \}$

Satz: L Sprache

$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$
 $\Leftrightarrow L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$

Beweisidee:

Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

$$\cdots k_i \vdash_M k_{i+1} \vdash_M k_{i+2} \vdash_M \cdots$$

$$\cdots k_i \xleftarrow{G} k_{i+1} \xleftarrow{G} k_{i+2} \xleftarrow{G} \cdots$$

Satz: L Sprache

$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$
 $\Leftrightarrow L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$

Beweis: “ $\Rightarrow$ ”

Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

neuer Startzustand


$$s' x \vdash_M s x \vdash_M \cdots \vdash_M k_i \vdash_M \cdots \vdash_M X f Y$$

$$x \leftarrow_G s' \quad x \leftarrow_G s \quad x \leftarrow_G \cdots \leftarrow_G k_i \leftarrow_G \cdots \leftarrow_G X f Y \quad *_G \leftarrow f \leftarrow_G S$$

Satz: L Sprache

$L = L(M)$ für irgendeine einfache Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, \#, Q, s, F, \Delta)$
 $\Leftrightarrow L = L(G)$ für irgendeine Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$

Beweis: “ $\Leftarrow$ ”

Ableitungsfolge entspricht umgekehrter Rechenschrittfolge

Produktionsanwendungen werden nichtdeterministisch rückgängig gemacht.

$$x \quad G \Leftarrow \cdots G \Leftarrow \quad U \quad G \Leftarrow \quad V \quad G \Leftarrow \cdots G \Leftarrow \quad S$$

$$s \ x \vdash_M s \in x \vdash_M^* \cdots \vdash_M^* \quad s \in U \quad \vdash_M^* \quad s \in V \quad \vdash_M^* \cdots \vdash_M^* \quad s \in \#^* S \#^* \vdash_M^* f \in \#^* S \#^*$$