

Grammatik alternativer Sprachspezifikationsmechanismus

$G = (\Sigma, V, S, P)$

Σ	Terminalalphabet
V	Variablen- (Nicht-terminal) –alphabet
$S \in V$	Startvariable
$P \subset FV F \times F$	“Produktionen” ($F = (\Sigma \cup V)^*$)

Σ, V, S, P müssen endlich sein
 $(\alpha, \beta) \in P$ wird geschrieben als $\alpha \rightarrow \beta$

Grammatik alternativer Sprachspezifikationsmechanismus

$G = (\Sigma, V, S, P)$

Σ	Terminalalphabet
V	Variablen- (Nicht-terminal) –alphabet
$S \in V$	Startvariable
$P \subset FV \times F$	“Produktionen” ($F = (\Sigma \cup V)^*$)

Σ, V, S, P müssen endlich sein
 $(\alpha, \beta) \in P$ wird geschrieben als $\alpha \rightarrow \beta$

G induziert Ableitungsschritt-Relation (Derivationsschritt-Relation)
 $\Rightarrow_G$ auf F durch $\gamma\alpha\gamma' \Rightarrow_G \gamma\beta\gamma'$ wenn $\alpha \rightarrow \beta$ Produktion in P

$\Rightarrow_G^*$ reflexive, transitive Hülle von $\Rightarrow_G$: Ableitungsrelation
(Derivationsrelation) auf F

Die von G generierte Sprache

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w \}$$

Chomsky Hierarchie für Grammatiken und Sprachen

Typ 0 (unbeschränkt)

Typ 1 (**kontextsensitiv**)

nur Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 (**kontextfrei**)

nur Regeln $A \rightarrow \alpha$ mit $A \in V$

Typ 3 (**rechtslinear**)

nur Regeln $A \rightarrow uB$, $A \rightarrow u$, $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A, B \in V$ und $u \in \Sigma$

Chomsky Hierarchie für Grammatiken und Sprachen

Typ 0 (unbeschränkt)

Typ 1 (**kontextsensitiv**)

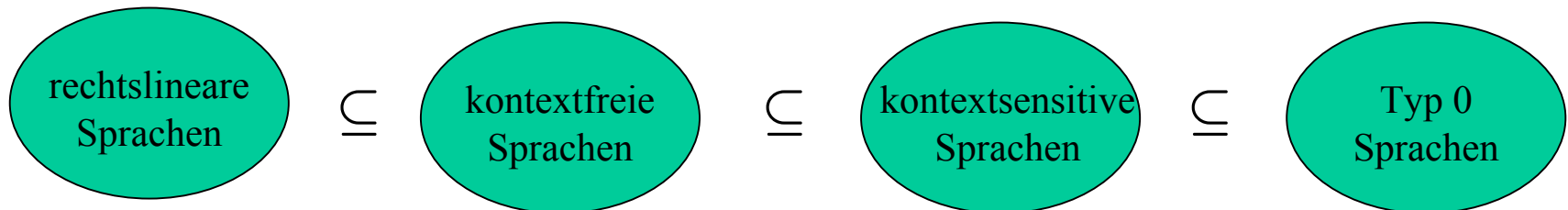
nur Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ mit $|\alpha| \leq |\beta|$

Typ 2 (**kontextfrei**)

nur Regeln $A \rightarrow \alpha$ mit $A \in V$

Typ 3 (**rechtslinear**)

nur Regeln $A \rightarrow uB$, $A \rightarrow u$, $A \rightarrow \varepsilon$ mit $A, B \in V$ und $u \in \Sigma$



Satz: Die rechtslinearen Sprachen sind genau die regulären Sprachen.

Beweis:

1) L rechtslinear $\Rightarrow L$ regulär

Idee: zeige, dass L nur endlich viele Fortsetzungssprachen hat

2) L regulär $\Rightarrow L$ rechtslinear

L regulär $\Rightarrow L = L(M)$ für DEA $M = (\Sigma, Q, s, F, \Delta)$

Betrachte Grammatik $G = (\Sigma, Q, s, P)$ mit

$$P = \{ p \rightarrow uq \mid (p, u, q) \in \Delta \} \cup \{ p \rightarrow \varepsilon \mid p \in F \}$$

Kontextfreie Grammatiken und Sprachen

Bsp: kfG für geklammerte arithmetische Ausdrücke über
Binärzahlen und Variablennamen über $\{a,b\}^*$

$$G = (\Sigma, V, E, P) \text{ mit } \Sigma = \{a, b, 0, 1, (,), *, +\}$$

$$V = \{E, K, W\}$$

$$\text{und Produktionen } P: E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid K \mid W$$

$$W \rightarrow aW \mid bW \mid a \mid b$$

$$K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$$

$$11*(a+1) \in L(G)$$

$$(a+b)(a+1) \notin L(G)$$



$G = (\Sigma, V, E, P)$ mit $\Sigma = \{\text{a}, \text{b}, 0, 1, (,), *, +\}$
 $V = \{E, K, W\}$
 und Produktionen P : $E \rightarrow E+E \mid E^*E \mid (E) \mid K \mid W$
 $W \rightarrow \text{a}W \mid \text{b}W \mid \text{a} \mid \text{b}$
 $K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

$\underline{E} \Rightarrow E^*\underline{E} \Rightarrow E^*(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}^*(E+E)$
 $\Rightarrow K^*(\underline{E}+E) \Rightarrow K^*(W+\underline{E})$
 $\Rightarrow \underline{K}^*(W+K) \Rightarrow 1\underline{K}^*(W+K)$
 $\Rightarrow 11^*(W+\underline{K}) \Rightarrow 11^*(\underline{W}+1)$
 $\Rightarrow 11^*(\text{a}+1)$

$G = (\Sigma, V, E, P)$ mit $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{(}, \mathbf{)}, \mathbf{*}, \mathbf{+}\}$
 $V = \{E, K, W\}$
 und Produktionen P : $E \rightarrow E\mathbf{+}E \mid E\mathbf{*}E \mid \mathbf{(}E\mathbf{)} \mid K \mid W$
 $W \rightarrow \mathbf{a}W \mid \mathbf{b}W \mid \mathbf{a} \mid \mathbf{b}$
 $K \rightarrow \mathbf{0}K \mid \mathbf{1}K \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{1}$

$$\begin{aligned}
 \underline{E} &\Rightarrow E\mathbf{*}\underline{E} \Rightarrow E\mathbf{*}(\underline{E}) \Rightarrow \underline{E}\mathbf{*}(E\mathbf{+}E) \\
 &\Rightarrow K\mathbf{*}(\underline{E}\mathbf{+}E) \Rightarrow K\mathbf{*}(W\mathbf{+}\underline{E}) \\
 &\Rightarrow \underline{K}\mathbf{*}(W\mathbf{+}K) \Rightarrow \mathbf{1}\underline{K}\mathbf{*}(W\mathbf{+}K) \\
 &\Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(W\mathbf{+}\underline{K}) \Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\underline{W}\mathbf{+}\mathbf{1}) \\
 &\Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\mathbf{a}\mathbf{+}\mathbf{1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{E} &\Rightarrow \underline{E}\mathbf{*}E \Rightarrow \underline{K}\mathbf{*}E \Rightarrow \mathbf{1}\underline{K}\mathbf{*}E \\
 &\Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}\underline{E} \Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\underline{E}) \Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\underline{E}\mathbf{+}E) \\
 &\Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\underline{W}\mathbf{+}E) \Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\mathbf{a}\mathbf{+}\underline{E}) \\
 &\Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\mathbf{a}\mathbf{+}\underline{K}) \Rightarrow \mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{*}(\mathbf{a}\mathbf{+}\mathbf{1})
 \end{aligned}$$

LINKSABLEITUNG

$G = (\Sigma, V, E, P)$ mit

$\Sigma = \{a, b, 0, 1, (,), *, +\}$

$V = \{E, K, W\}$

und Produktionen P :

$E \rightarrow E + E \mid E * E \mid (E) \mid K \mid W$

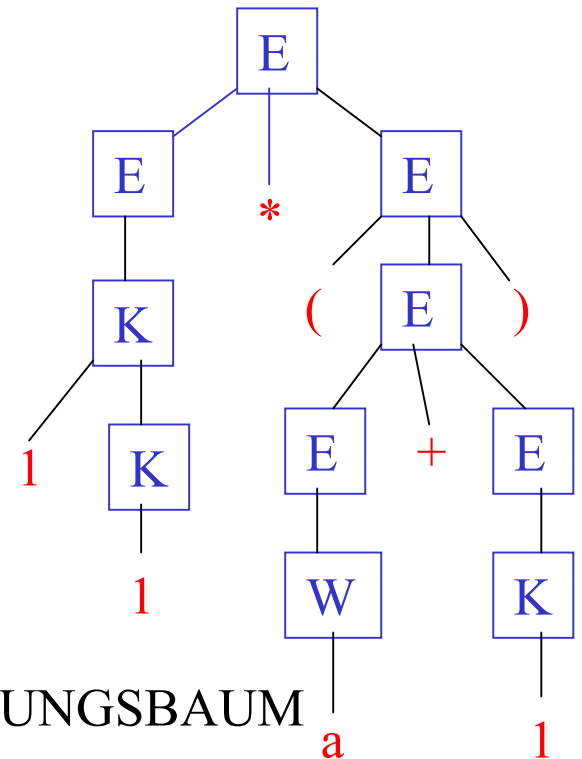
$W \rightarrow aW \mid bW \mid a \mid b$

$K \rightarrow 0K \mid 1K \mid 0 \mid 1$

$\underline{E} \Rightarrow E * \underline{E} \Rightarrow E * (\underline{E}) \Rightarrow \underline{E} * (E + E)$
 $\Rightarrow K * (\underline{E} + E) \Rightarrow K * (W + \underline{E})$
 $\Rightarrow \underline{K} * (W + K) \Rightarrow 1 \underline{K} * (W + K)$
 $\Rightarrow 11 * (W + \underline{K}) \Rightarrow 11 * (\underline{W} + 1)$
 $\Rightarrow 11 * (a + 1)$

$\underline{E} \Rightarrow \underline{E} * E \Rightarrow \underline{K} * E \Rightarrow 1 \underline{K} * E$
 $\Rightarrow 11 * \underline{E} \Rightarrow 11 * (\underline{E}) \Rightarrow 11 * (\underline{E} + E)$
 $\Rightarrow 11 * (\underline{W} + E) \Rightarrow 11 * (a + \underline{E})$
 $\Rightarrow 11 * (a + \underline{K}) \Rightarrow 11 * (a + 1)$

LINKSABLEITUNG



ABLEITUNGSBAUM

Lemma: $G = (\Sigma, V, S, P)$ kontextfreie Grammatik, $\alpha \in (\Sigma \cup V)^*$

$\exists$ Ableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow \exists$ Linksableitung $S \Rightarrow_G^* \alpha$

$\Leftrightarrow \exists$ Ableitungsbaum mit α als Blätterbeschriftung

Satz: Die kontextfreien Sprachen sind genau die NKA-Sprachen.

$L = L(G)$ für irgendeine kfG $G = (\Sigma, V, S, P)$

$\Leftrightarrow L = L_\epsilon(M)$ für irgendeinen NKA $M = (\Sigma, \Gamma, \epsilon, Q, s, \Delta)$

Satz: Die kontextfreien Sprachen sind genau die NKA-Sprachen.

$L=L(G)$ für irgendeine kfG $G=(\Sigma,V,S,P)$

$\Leftrightarrow L=L_{\epsilon}(M)$ für irgendeinen NKA $M=(\Sigma,\Gamma,\epsilon,Q,s,\Delta)$

Beweis: 1) “ $\Rightarrow$ ” Gegeben Grammatik G , baue NKA M , dessen akzeptierende Berechnungen Linksableitungen in G entsprechen

$$\Gamma = V \cup \Sigma \quad \epsilon = S \quad Q = \{s\}$$

$$\Delta = \{ (s,A,\epsilon,\alpha,s) \mid A \rightarrow \alpha \text{ in } P \} \cup \{ (s,a,a,\epsilon,s) \mid a \in \Sigma \}$$