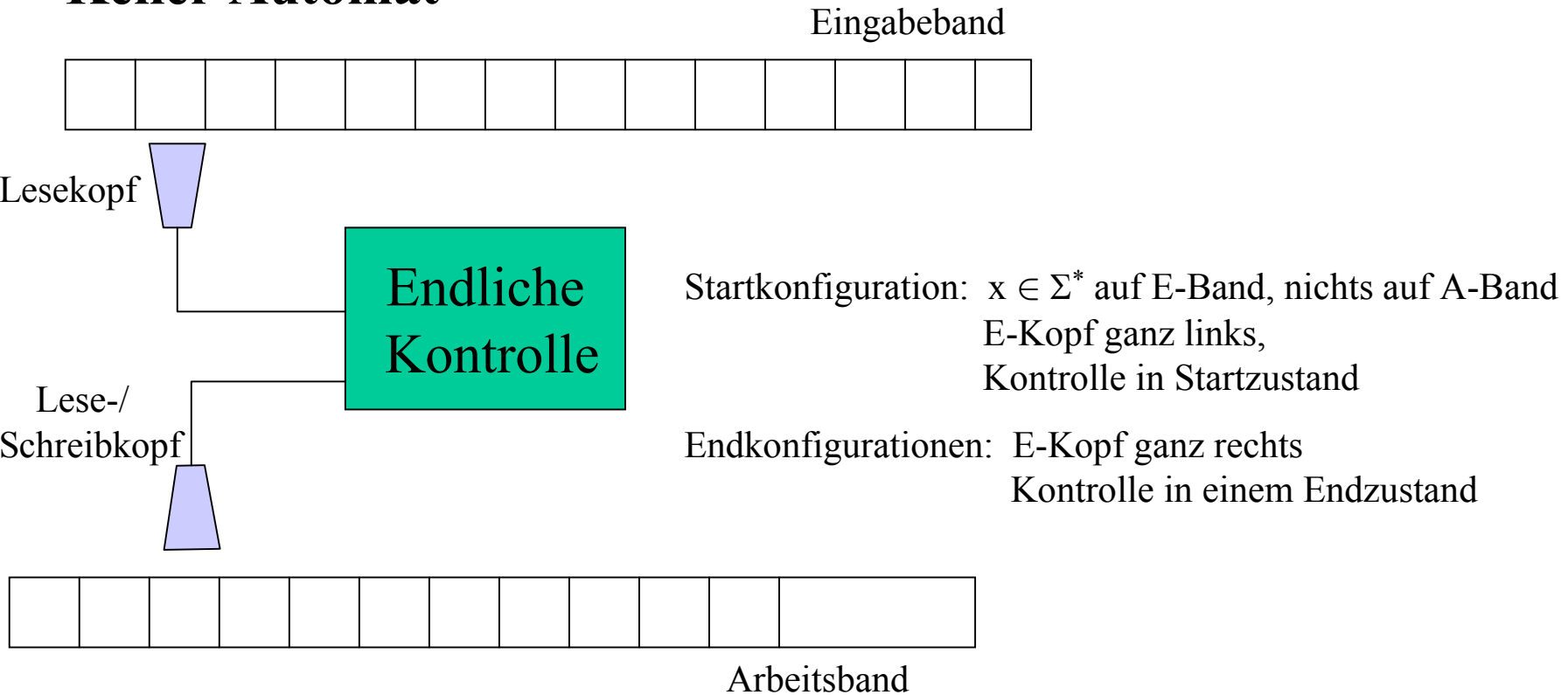


Keller Automat



Rechenschrittregeln:

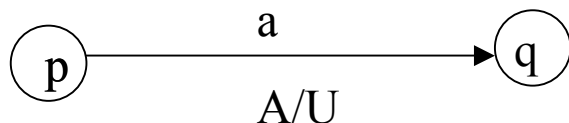
derzeitiger Zustand	gelesenes E-Symbol	gelesenes A-Symbol	→	neuer Zustand	E-Kopf nach rechts	schreibe A-Symbol	bewege A-Kopf
------------------------	-----------------------	-----------------------	---	------------------	-----------------------	----------------------	------------------

Wenn A-Kopf nach rechts bewegt wird, hinterlässt er leere Zelle.

Formale Spezifikation von Kellerautomaten

Σ	Eingabealphabet
Γ	Kelleralphabet
$\epsilon \in \Gamma$	Kellerboden
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände
$\Delta \subset (Q \times \Gamma \times (\Sigma \cup \{\epsilon\})) \times \Gamma^* \times Q$	Regeln (endlich)
derz. Zust. derz. Keller- gipfel konumierte Eingabe neuer Keller- gipfel neuer Zustand	

$(p, A, a, U, q) \in \Delta$ notiert durch



Konfiguration: $Q \times \Gamma^* \times \Sigma^*$

Zustand Kellerinhalt Eingaberest

Rechenschrittrelation:

$(p, AU, au) \vdash_M (q, VU, u) \quad \text{g.d.w.} \quad (p, A, a, V, q) \in \Delta$
 $(p, AU, u) \vdash_M (q, VU, u) \quad \text{g.d.w.} \quad (p, A, \varepsilon, V, q) \in \Delta$

$A \in \Gamma, U \in \Gamma^*, a \in \Sigma, u \in \Sigma^*$

Rechenrelation:

$\vdash_M^*$ reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

Startkonfiguration für Eingabe x : $\text{start}_x = (s, \epsilon, x)$

Endkonfigurationen: $\text{Fin} = \{ (f, W, \epsilon) \mid W \in \Gamma^*, f \in F \}$
(Akzeptanz durch Endzustand)

$\text{Fin}_\epsilon = \{ (q, \epsilon, \epsilon) \mid q \in Q \}$
(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin} \}$$

$$L_\epsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin}_\epsilon \}$$

Startkonfiguration für Eingabe x : $\text{start}_x = (s, \epsilon, x)$

Endkonfigurationen: $\text{Fin} = \{ (f, W, \epsilon) \mid W \in \Gamma^*, f \in F \}$
(Akzeptanz durch Endzustand)

$\text{Fin}_\epsilon = \{ (q, \epsilon, \epsilon) \mid q \in Q \}$
(Akzeptanz durch leeren Keller)

Von M akzeptierter Sprache:

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin} \}$$

$$L_\epsilon(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \text{start}_x \vdash_M^* \varphi \text{ für irgendein } \varphi \in \text{Fin}_\epsilon \}$$

Achtung: Um Wort x zu akzeptieren, muss das gesamte x konsumiert werden.

Satz:

$L=L(M)$ für irgendeinen NKA M

$\Leftrightarrow$

$L=L_\varepsilon(M')$ für irgendeinen NKA M'

“Äquivalenz von Akzeptanz durch Endzustand und
Akzeptanz durch leeren Keller.“

Def.: L heißt *NKA-Sprache* (oder *kontextfreie Sprache*),
wenn $L=L(M)$ oder $L=L_\varepsilon(M)$ für irgendeinen NKA M .

Pumping Lemma für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$: $\exists$ Unterteilung $z = uvwxy$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

Pumping Lemma für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$: $\exists$ Unterteilung $z = uvwxy$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

$\neg \left(\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L : \exists \text{ Unterteilung } z = uvwxy : \forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L \right)$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

$\Rightarrow \neg (L \text{ NKA-Sprache})$

Pumping Lemma für NKA Sprachen:

L NKA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L$: $\exists$ Unterteilung $z = uvwxy$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

$\neg \left(\exists N \in \mathbb{N} : \forall z \in L : \exists \text{ Unterteilung } z = uvwxy : \forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L \right)$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

$\Rightarrow \neg (L \text{ NKA-Sprache})$

$\forall N \in \mathbb{N} : \exists z \in L : \forall \text{ Unterteilung } z = uvwxy : \exists i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \notin L$
mit $|z| \geq N$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$

$\Rightarrow L$ ist **keine** NKA-Sprache

“Spiel” zum Zeigen, dass L keine NKA Sprache

1. Gegner gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $z \in L$ mit $|z| \geq N$.
3. Gegner gibt eine Unterteilung $z = uvwxy$ vor mit $|vwx| \leq N$,
 $|vx| > 0$.
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^iwx^iy \notin L$.