

Eigenschaften von regulären Sprachen

Satz: L, L' reguläre Sprachen, jeweils gegeben durch DEA M, M'

Folgende Probleme sind entscheidbar

(können effektiv, automatisch gelöst werden):

(i) $L = \Sigma^*$?

(ii) $L = \{\}$?

(iii) $L = L'$?

(iv) $L \subseteq L'$?

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$
mit $|x| \geq N$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$
mit $|x| \geq N$ mit $|u| \leq N$ und $|v| > 0$

Beweisidee:

Jeder Pfad mit mindestens N Kanten in einem Graphen mit N Knoten hat eine Schleife.

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$
mit $|x| \geq N$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$

$\neg \left(\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L : \exists \text{ Unterteilung } x=uvw : \forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \notin L \right)$
mit $|x| \geq N$ mit $|uv| \leq N$ und $|v| > 0$

$\Rightarrow \neg (L \text{ DEA-Sprache})$

Pumping Lemma für reguläre Sprachen:

L DEA-Sprache $\Rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L$: $\exists$ Unterteilung $x=uvw$: $\forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \in L$
mit $|x| \geq N$ mit $|u| \leq N$ und $|v| > 0$

$\neg \left(\exists N \in \mathbb{N} : \forall x \in L : \exists \text{ Unterteilung } x=uvw : \forall i \in \mathbb{N} : uv^i w \notin L \right)$
mit $|x| \geq N$ mit $|u| \leq N$ und $|v| > 0$

$\Rightarrow \neg (L \text{ DEA-Sprache})$

$\forall N \in \mathbb{N} : \exists x \in L : \forall \text{ Unterteilung } x=uvw : \exists i \in \mathbb{N} : uv^i w \notin L$
mit $|x| \geq N$ mit $|u| \leq N$ und $|v| > 0$

$\Rightarrow L$ ist **keine** DEA-Sprache

“Spiel” zum Zeigen, dass L keine DEA Sprache

1. Gegner gibt eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle ein $x \in L$ mit $|x| \geq N$.
3. Gegner gibt eine Unterteilung $x = uvw$ vor mit $|uv| \leq N$, $|v| > 0$.
4. Ich wähle ein $i \in \mathbb{N}$, sodass $uv^i w \notin L$.

Reguläre Ausdrücke

Mechanismus zum Spezifizieren von Sprachen über Alphabet Σ

Ausdruck	Bedeutung
$\emptyset$	$\llbracket \emptyset \rrbracket = \{ \}$
ε	$\llbracket \varepsilon \rrbracket = \{ \varepsilon \}$
$a \in \Sigma$ a	$\llbracket a \rrbracket = \{ a \}$
r_1, r_2 reg. Ausdrücke	
$(r_1 + r_2)$	$\llbracket (r_1 + r_2) \rrbracket = \llbracket r_1 \rrbracket \cup \llbracket r_2 \rrbracket$
$r_1 r_2$	$\llbracket r_1 r_2 \rrbracket = \llbracket r_1 \rrbracket \cdot \llbracket r_2 \rrbracket$
$(r_1)^*$	$\llbracket (r_1)^* \rrbracket = \llbracket r_1 \rrbracket^*$

Reguläre Ausdrücke definieren genau die DKA-Sprachen.

Satz: $L = \llbracket r \rrbracket$ für einen regulären Ausdruck r genau dann, wenn
 $L = L(M)$ für irgendeinen DEA M .

Beweis: “ $\Rightarrow$ ”

Idee: strukturelle Induktion; baue NEA mit ε -Übergängen

“ $\Leftarrow$ ” Gegeben DEA $M=(\Sigma,Q,s,F,\Delta)$, Übergangsgraph G_M

$$Q = \{q_1, \dots, q_n\}, \quad s = q_1, \quad F = \{q_{j_1}, \dots, q_{j_f}\}$$

Für $0 \leq k \leq n$, $1 \leq i, j \leq n$ sei r_{ij}^k Ausdruck, der alle Beschriftungen von Pfaden in G_M beschreibt mit Anfangsknoten q_i , Endknoten q_j , und **internen** Knoten mit Index $\leq k$.

$$\begin{aligned} & r_{ii}^0 = \varepsilon + a_1 + \dots + a_t \text{ mit } (q_i, a_h, q_i) \in \Delta \text{ für } 1 \leq h \leq t \\ i \neq j & \quad r_{ij}^0 = a_1 + \dots + a_t \text{ mit } (q_i, a_h, q_j) \in \Delta \text{ für } 1 \leq h \leq t \end{aligned}$$

$$k > 0 \quad r_{ij}^k = r_{ij}^{k-1} + r_{ik}^{k-1} (r_{kk}^{k-1})^* r_{kj}^{k-1}$$

$$L(M) = r_{1j_1}^n + r_{1j_2}^n + \dots + r_{1j_f}^n$$