

Endlicher Automat M

Σ	Eingabealphabet
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände
$\Delta \subset ((Q \times \Sigma) \times Q)$	Übergangsrelation

M deterministisch: $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma : |\{q' \in Q : (q,a,q') \in \Delta\}| \leq 1$

Konfigurationen von M : $K_M = Q \times \Sigma^*$

Startkonfiguration für Eingabe $x \in \Sigma^*$: $\text{start}_x = (s,x)$

Endkonfigurationen: $\text{Fin} = \{(f,\varepsilon) \mid f \in F\}$

Konfigurationen von M : $K_M = Q \times \Sigma^*$

Startkonfiguration für Eingabe $x \in \Sigma^*$: $\text{start}_x = (s, x)$

Endkonfigurationen: $F_{\text{in}} = \{(f, \varepsilon) \mid f \in F\}$

Rechenschrittrelation $\vdash_M$ auf K_M

$\forall q \in Q, a \in \Sigma, u \in \Sigma^* : (q, au) \vdash_M (q', u) \quad \text{g.d.w.} \quad (q, a, q') \in \Delta$

Rechenrelation $\vdash_M^*$ auf K_M

reflexive, transitive Hülle von $\vdash_M$

$k \vdash_M^* k' \quad \text{g.d.w.} \quad \exists m \geq 0 \exists k_0, \dots, k_m \text{ sodass}$

$k = k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \dots \vdash_M k_m = k'$

M akzeptiert $x \in \Sigma^*$ g.d.w. $\text{start}_x \vdash_M^* (f, \varepsilon)$ für irgendein $f \in F$

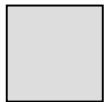
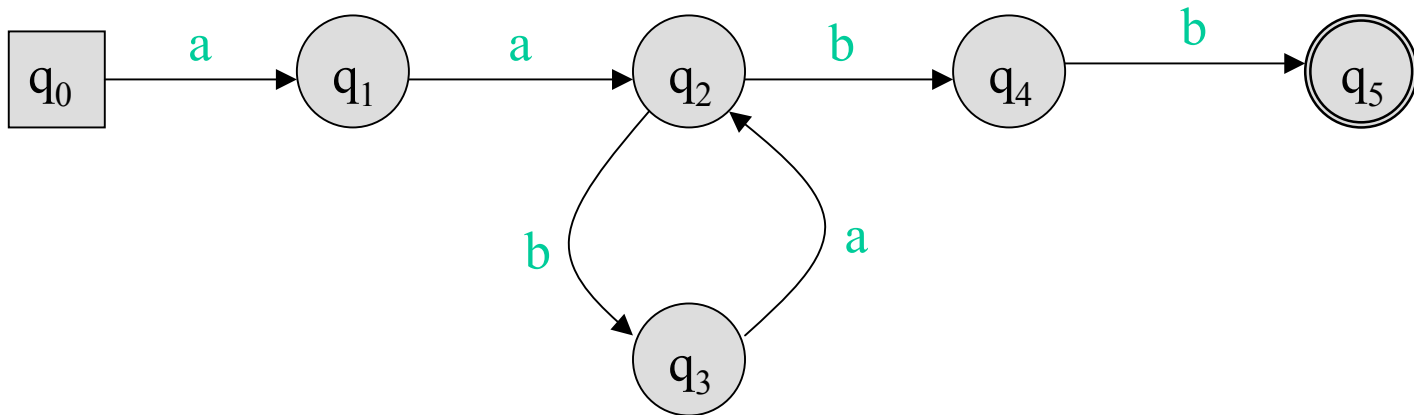
$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x \}$ die von M akzeptierte Sprache.

L DEA-Sprache g.d.w. $L = L(M)$ für irgendeinen DEA M

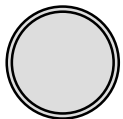
L NEA-Sprache g.d.w. $L = L(M)$ für irgendeinen NEA M

$G_M = (Q, E)$ **Übergangsgraph** von M

$q \xrightarrow{a} q' \text{ in } E \Leftrightarrow (q, a, q') \in \Delta$

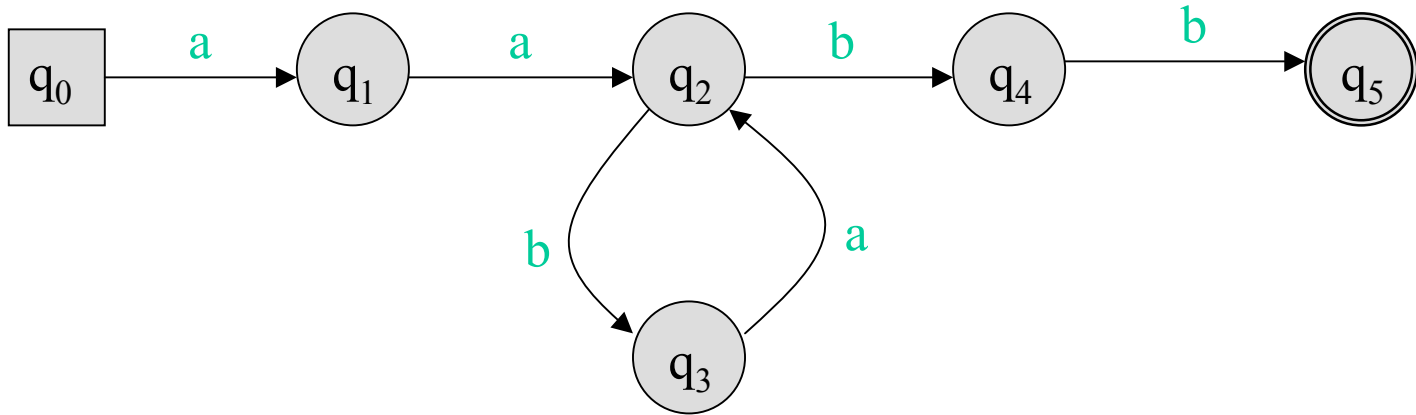


Startknoten



Endknoten

M akzeptiert Wort w genau dann, wenn w Beschriftung eines gerichteten Pfades in G_M von Startknoten zu einem Endknoten.



aabb $\in L(M)$

aa ba bb $\in L(M)$

aa babababa bb $\in L(M)$

aa bb a $\notin L(M)$

Fortsetzungssprachen

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^* :$ $F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Fortsetzungssprachen

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^* : F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $L = \Sigma^*$

für jedes w gilt: $F_L(w) = \Sigma^*$

also $\mathcal{F}_L = \{ \Sigma^* \}$

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^* : F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $\Sigma = \{a,b\}$ $L = \{ u \in \Sigma^* \mid \#_a(u) \text{ ist durch } 3 \text{ teilbar} \}$

$$F_L(\text{bbab}) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 2 \}$$

$$F_L(\text{ab}) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 2 \}$$

$$F_L(\text{aab}) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 1 \}$$

$$F_L(\text{abaab}) = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = 0 \}$$

$$\mathcal{F}_L = \{ L_0, L_1, L_2 \} \quad L_i = \{ x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) \bmod 3 = i \}$$

$L \subset \Sigma^*$ Sprache

$w \in \Sigma^* : F_L(w) = \{ x \in \Sigma^* \mid wx \in L \}$

Fortsetzungssprache von w bezüglich L

$\mathcal{F}_L = \{ F_L(w) \mid w \in \Sigma^* \}$ Menge der Fortsetzungssprachen für L

Bsp: $\Sigma = \{a,b\}$ $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$F_L(bbab) = \{ \}$ $F_L(ab) = \{ \varepsilon \}$

$F_L(aab) = \{ b \}$ $F_L(aaaaabb) = \{ bbb \}$

$F_L(aaa) = \{ bbb, abbbb, aabbbbb, \dots \}$

$\mathcal{F}_L = \{ \{ \} \} \cup \{ L_i \mid i \in \mathbb{N} \} \cup \{ S_j \mid j \in \mathbb{N} \}$

$L_i = \{ b^i \mid i \in \mathbb{N} \}$ $S_j = \{ a^{n-j} b^n \mid n \geq j \}$

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow \mathcal{F}_L$ ist endlich

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow \mathcal{F}_L$ ist endlich

Beweis: L DEA-Sprache $\Rightarrow \exists$ DEA $M=(Q,\Sigma,s,F,\Delta)$ mit $L(M)=L$

für $q \in Q$ sei $L_q = \{x \in \Sigma^* \mid (q,x) \vdash_M^* (f,\varepsilon) \text{ für irgendein } f \in F \}$

$F_L(w) = L_p$ mit p , so dass $(s,w) \vdash_M^* (p,\varepsilon)$

(und $F_L(w)=\{\}$, falls so ein p nicht existiert)

Also gilt $\mathcal{F}_L = \{ L_q \mid q \in Q \}$

(plus möglicherweise $\{\}$)

und $\mathcal{F}_L$ ist endlich.

Lemma: L DEA-Sprache $\Rightarrow \mathcal{F}_L$ ist endlich

d.h. $\mathcal{F}_L$ **nicht** endlich $\Rightarrow L$ **nicht** DEA-Sprache

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^* \}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

Sei $w^{(i)} = a^i b$ für $i > 0$.

$$F_L(w^{(i)}) = \{ b^{i-1} \}$$

Also $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^* \}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \}$

Sei $w^{(i)} = a^{i^2}$ für $i \in \mathbb{N}$.

$$i^2 + (2i+1) = (i+1)^2 \Rightarrow w^{(i)}a^{2i+1} = a^{(i+1)^2} \in L$$

$$w^{(i)}a^{2j+1} \notin L \text{ für } j < i$$

$$F_L(w^{(i)}) = \{ a^{2i+1}, \dots \}$$

Also $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $j < i$

Um zu zeigen, dass eine Sprache L keine DEA-Sprache ist, reicht es eine unendliche Menge $\{w^{(i)} \in \Sigma^* \}$ von Worten zu finden mit $F_L(w^{(i)}) \neq F_L(w^{(j)})$ für $i \neq j$.

Bsp: $L = \{ a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl} \}$

Sei $w^{(p)} = a^p$ mit p Primzahl. $\{ w^{(p)} \mid p \text{ Primzahl} \}$ ist unendlich.

p, q zwei verschiedene Primzahlen

$\Rightarrow p$ und q teilerfremd

$\Rightarrow \exists k$ mit $p+k \cdot q$ ist Primzahl (aber $q+k \cdot q$ ist keine Primzahl !)

Also $F_L(w^{(p)}) \neq F_L(w^{(q)})$ für $p \neq q$,
denn $a^{k \cdot q} \in F_L(w^{(p)})$ und $a^{k \cdot q} \notin F_L(w^{(q)})$

Fakten über Primzahlen: 1) Es gibt unendlich viele Primzahlen
2) $c, d \in \mathbb{N}$ teilerfremd $\Rightarrow \{ c+k \cdot d \mid k \in \mathbb{N} \}$ enthält eine Primzahl (sogar unendlich viele)
(Satz von Dirichlet)