

Funktion $f : A \rightarrow B$

f **injektiv** $\Leftrightarrow \forall a, a' \in A, a \neq a' : f(a) \neq f(a')$

f **surjektiv** $\Leftrightarrow \forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b$

f **bijektiv** $\Leftrightarrow f$ injektiv und f surjektiv

Mengen A und B sind **gleichmächtig** $\Leftrightarrow \exists$ Bijektion $f : A \rightarrow B$

Menge A ist **endlich** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : A$ gleichmächtig mit $\{1, \dots, k\}$

Menge A ist **abzählbar unendlich** $\Leftrightarrow A$ gleichmächtig mit $\mathbb{N}$

Menge A ist **abzählbar** $\Leftrightarrow A$ ist endlich oder
 A ist abzählbar unendlich

Lemma 0:

$$A \text{ abzählbar} \Leftrightarrow \exists \text{ Injektion } A \rightarrow \mathbb{N} \Leftrightarrow \exists \text{ Surjektion } \mathbb{N} \rightarrow A$$

$$B \text{ abzählbar und } A \subset B \Rightarrow A \text{ abzählbar}$$

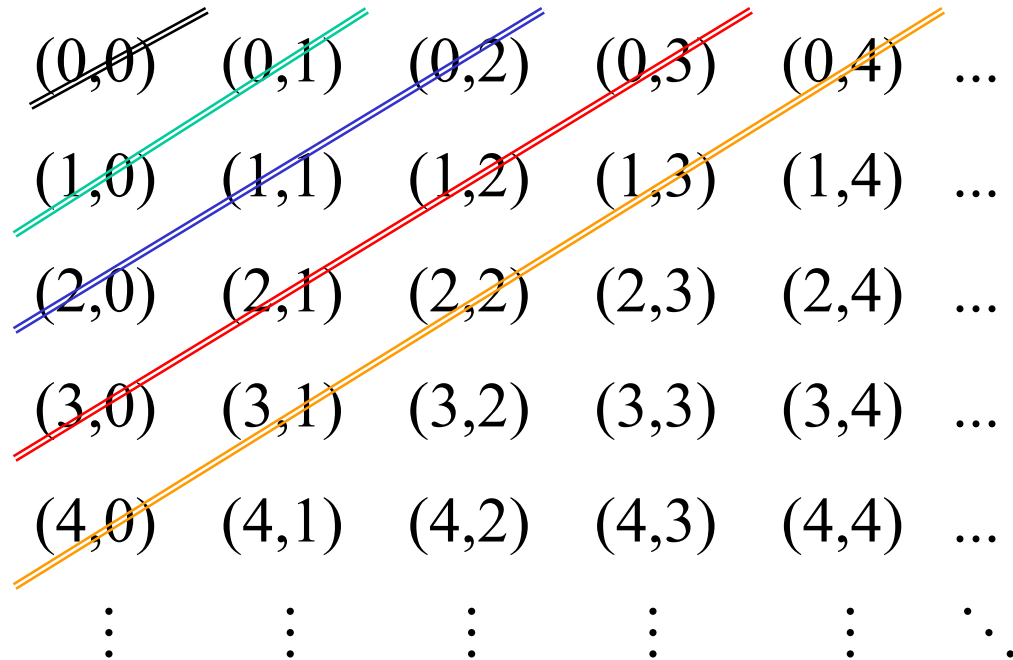
Lemma 1: $A_1, \dots, A_k$ endlich $\Rightarrow \bigcup_{1 \leq i \leq k} A_i$ ist endlich
 $A_1 \times \dots \times A_k$ ist endlich

Lemma 2: A_i endlich für $i \in \mathbb{N}$ (und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$)
 $\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ist abzählbar

Kor.: Σ endliches Alphabet $\Rightarrow \Sigma^*$ ist abzählbar

$$(\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i)$$

Lemma 3: A, B abzählbar $\Rightarrow A \cup B$ abzählbar
 $A \times B$ abzählbar



Kor.: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Lemma 4: A_i abzählbar für $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ ist abzählbar

Satz: (Cantor, Russell)

A Menge, $2^A = \{ B \mid B \subset A \}$ Potenzmenge von A

A und 2^A sind NICHT gleichmächtig, d.h.

es gibt keine Bijektion zwischen A und 2^A

Beweis: zu zeigen: jede Funktion $f:A \rightarrow 2^A$ ist NICHT surjektiv

d.h. $\exists \Delta = \Delta_f$ mit $\Delta \neq f(a)$ für alle $a \in A$

wähle $\Delta = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \}$

dann gilt $\Delta \neq f(a)$ für alle $a \in A$, da $a \in \Delta \Leftrightarrow a \notin f(a)$

Korollar 1: $2^{\mathbb{N}}$ ist nicht abzählbar

Korollar 2: Die Menge aller unbeschränkten Bitfolgen
 $\{ \alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \}$
is nicht abzählbar.

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
α_0	1	1	0	1	0	1	1	0	...
α_1	0	1	1	1	0	0	1	0	...
α_2	0	0	0	1	0	1	1	1	...
α_3	1	0	0	0	0	0	0	0	...
α_4	1	1	0	1	0	1	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cantorsche
Diagonalisierung

Korollar 1: $2^{\mathbb{N}}$ ist nicht abzählbar

Korollar 2: Die Menge aller unbeschränkten Bitfolgen
 $\{ \alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \}$
is nicht abzählbar.

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
α_0	1 0	1	0	1	0	1	1	0	...
α_1	0	1 0	1	1	0	0	1	0	...
α_2	0	0	0 1	1	0	1	1	1	...
α_3	1	0	0	0 1	0	0	0	0	...
α_4	1	1	0	1	0 1	1	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Cantorsche
Diagonalisierung

$$\delta(i) = 1 - \alpha_i(i)$$

Korollar 1: $2^{\mathbb{N}}$ ist nicht abzählbar

Korollar 2: Die Menge aller unbeschränkten Bitfolgen
 $\{ \alpha \mid \alpha : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\} \}$
is nicht abzählbar.

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
α_0	1 0	1	0	1	0	1	1	0	...
α_1	0	1 0	1	1	0	0	1	0	...
α_2	0	0	0 1	1	0	1	1	1	...
α_3	1	0	0	0 1	0	0	0	0	...
α_4	1	1	0	1	0 1	1	0	0	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

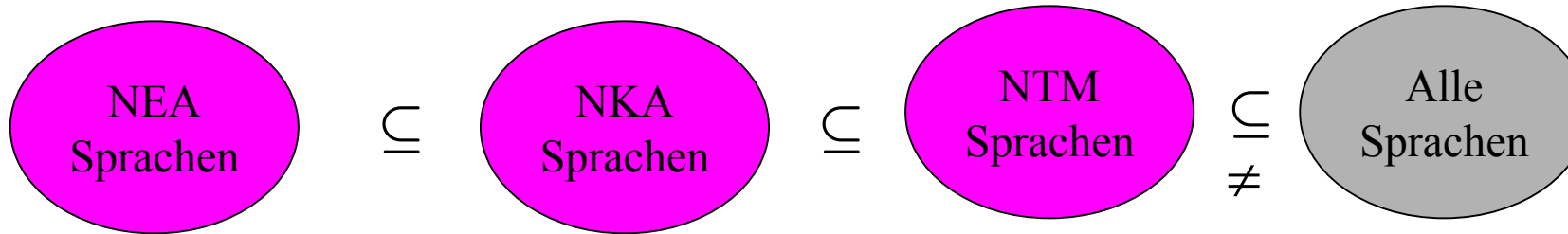
Cantorsche
Diagonalisierung

$$\delta(i) = 1 - \alpha_i(i)$$

Korollar 3: $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar

Korollar 4: Es gibt Sprachen, die keine NTM-Sprachen sind.

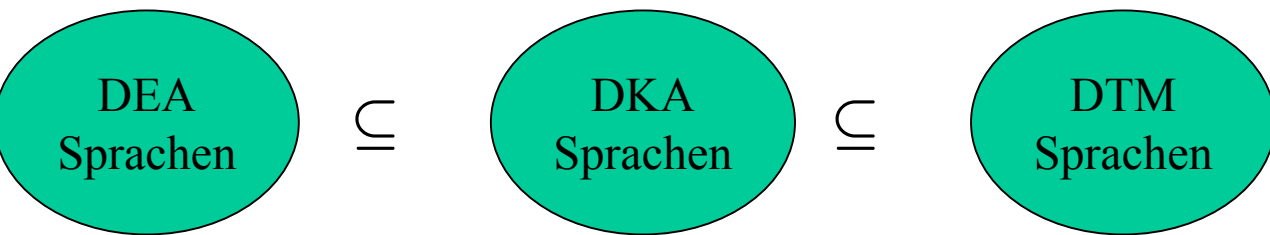
Beweis: es gibt nur abzählbare viele Turing Maschinen, also
nur abzählbar viele NTM-Sprachen
aber die Menge aller Sprachen ist nicht abzählbar.



$\cup$

$\cup$

$\cup$



Endlicher Automat M

Σ	Eingabealphabet
Q	Zustandsmenge (endlich)
$s \in Q$	Startzustand
$F \subset Q$	Endzustände
$\Delta \subset ((Q \times \Sigma) \times Q)$	Übergangsrelation

M deterministisch: $\forall (q,a) \in Q \times \Sigma : |\{q' \in Q : (q,a,q') \in \Delta\}| \leq 1$

Konfigurationen von M : $K_M = Q \times \Sigma^*$

Startkonfiguration für Eingabe $x \in \Sigma^*$: $\text{start}_x = (s,x)$

Endkonfigurationen: $\text{Fin} = \{(f,\varepsilon) \mid f \in F\}$