



Aufgabe 1

a) Wir definieren f und g wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} n^3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} n^3 & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ n^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

1) **Behauptung:** $f \notin \mathcal{O}(g)$

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ mit der Eigenschaft, daß $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann setzen wir n' auf eine ungerade Zahl größer als c , die keine Primzahl ist, und erhalten $f(n') = n'^3 > c \cdot n'^2 = c \cdot g(n)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

2) **Behauptung:** $g \notin \mathcal{O}(f)$

Beweis: Angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ mit der Eigenschaft, daß $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann setzen wir n' auf eine gerade Zahl größer als c und erhalten $g(n') = n'^2 > c \cdot n = c \cdot f(n)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

Bemerkung: Eine erste Idee ist, sich die gesuchten Funktionen aus $\sin(x)$ und $\cos(x)$ zusammenzubauen. Hierbei ist zweierlei zu berücksichtigen: 1. Wir haben uns auf Funktionen beschränkt, die fast überall nichtnegativ sind. 2. Die Nullstellen müssen bei natürlichen Zahlen liegen.

b) Es sei $\text{gerade}(n) = 1$, wenn n gerade ist und $\text{gerade}(n) = 0$ sonst. Die Funktion $\text{ungerade}(n)$ definieren wir analog.

Betrachte $f(n) = n^{n+\text{gerade}(n)}$ und $g(n) = n^{n+\text{ungerade}(n)}$. Es gilt $f(n) \neq g(n)$ für $n \geq 2$ und $f(n), g(n) \in \{n^n, n^{n+1}\}$. Genauer: Für $n \geq 2$ und n gerade ist $f(n) = ng(n)$ und für n ungerade ist $g(n) = nf(n)$.

Beide Funktionen sind streng monoton steigend. Wir zeigen dies für $f(n)$. Es ist $f(n+1) = (n+1)^{n+1+\text{gerade}(n+1)} \geq (n+1)^{n+1} = (n+1)^n \cdot (n+1)^1 > n^n \cdot n^1 > n^n \cdot n^{\text{gerade}(n)} = f(n)$.

Es gilt $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$. Wir zeigen die erste Aussage, die zweite folgt analog. Zu zeigen ist: $\forall c > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 f(n) > cg(n)$. Bei gegebenen c und n_0 wählen wir n als gerade Zahl größer als $\max\{2, c, n_0\}$. Dann gilt $f(n) = ng(n) > cg(n)$.

Aufgabe 2

Wir setzen $g(n) := b^{f(n)}$ für ein von L abhängiges konstantes b .

Dann ist $\bar{L} \in \text{NTIME}(g(n))$. Beweis:

$L \in \text{NTIME}(f(n))$

7.3.3 Lemma B ii)
 $\Rightarrow$



$L \in DTIME(b^{f(n)})$ für ein von L abhängiges konstantes b

7.3.7 Lemma D i)
 $\Rightarrow$

$\bar{L} \in DTIME(b^{f(n)})$

7.3.3 Lemma B i)
 $\Rightarrow$

$\bar{L} \in NTIME(b^{f(n)})$

$\Rightarrow \bar{L} \in NTIME(g(n))$

Aufgabe 3

Die Beweisidee ist genau wie die für das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: wenn die Anzahl N der möglichen Zustände eines Automaten M kleiner als die Länge der Eingabe w ist, dann wird der Automat beim Einlesen der ersten N Symbole von w nach dem Schubfachprinzip in einen der Zustände q (mindestens) zweimal geraten. Das nicht leere Teilwort v der Eingabe $w = uvx$, welches den Automaten M vom Zustand q zum selben Zustand q gebracht hat, könnte beliebig oft (d.h. 0- oder mehrmal) wiederholt werden, d.h. $w = uvx \in L(M) \Rightarrow uv^i x \in L(M) \forall i \in \mathbb{N}$.

Der Unterschied zwischen einem DEA und der DTM M der Aufgabe liegt darin, dass die im weiteren Sinn Zustandsmenge der letzten nicht mit der Zustandsmenge Q übereinstimmt, sondern um alle möglichen Konfigurationen des Arbeitsbands erweitert ist. Nennen wir das Produkt der Zustandsmenge Q und der Menge aller Konfigurationen des Arbeitsbands *die erweiterte Zustandsmenge* Z . Formal: $Z = Q \times \Gamma^+ \times \mathbb{N}^+$, wobei die zweite Komponente eines erweiterten Zustands den Inhalt des Arbeitsbands und die letzte Komponente die Position des Lese/Schreibkopfs auf dem Arbeitsband bezeichnet.

Wenn die DTM M die ersten $n > 0$ Symbole der Eingabe gelesen hat, kann M in einem von insgesamt $|Q| \cdot |\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor} \cdot \lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor$ möglichen erweiterten Zuständen sein.

Zu zeigen ist, dass $\forall |\Gamma|, |Q| \in \mathbb{N}^+ : \exists N \in \mathbb{N}^+ : \forall n \in \mathbb{N}^+, n \geq N : n \geq |Q| \cdot |\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor} \cdot \lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor$.

Wenn das stimmt, dann wird die DTM M innerhalb des Einlesens der ersten N Symbole der Eingabe zweimal in den selben erweiterten Zustand geraten, welches, wie am Anfang erklärt, impliziert, dass die von M akzeptierte Sprache die Pumping-Eigenschaft erfüllt.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor}{n^{1/3}} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \log_2 n}{n^{1/3}} = (\text{L'Hospital})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/\log_2 n) \cdot (1/n)}{1/3 \cdot n^{-2/3}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^{1/3} \cdot \log_2 n} = 0 \Rightarrow$$

$$\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor \in o(n^{1/3}) \Rightarrow$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \in \mathbb{N}^+ : n \geq n_1 : \lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor \leq n^{1/3} \quad (1).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor}}{n^{1/3}} \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma|^{\log_2 \log_2 n}}{n^{1/3}} =$$

Theoretische Informatik (WS05)

Prof. Dr. Raimund Seidel

Wei Ding

Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 11



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_2 n)^{\log_2 |\Gamma|}}{n^{1/3}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 n}{n^{1/(3 \cdot \lceil \log_2 |\Gamma| \rceil)}} \right)^{\log_2 |\Gamma|} = 0^{\log_2 |\Gamma|} = 0 \Rightarrow$$

$$|\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor} \in o(n^{1/3}) \Rightarrow$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \in \mathbb{N}^+ : n \geq n_1 : |\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor} \leq n^{1/3} \quad (2).$$

$$n_3 = |Q|^3 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : n \geq n_3 : |Q| \leq n^{1/3} \quad (3).$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ : n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\} :$$

$$n^{1/3} \cdot n^{1/3} \cdot n^{1/3} = n \geq |Q| \cdot |\Gamma|^{\lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor} \cdot \lfloor \log_2 \lfloor \log_2 n \rfloor \rfloor.$$