



Aufgabe 1

Beweis mittels Pumping Lemma:

Zunächst stellen wir fest: Da $\#, \$ \notin \Sigma$, muss jedes Wort $w \in L := L_X \cap L_Y$ von der Form $I^R \# I \$ I^R \# X[I]$ mit $X[I] = Y[I]$ sein.

Angenommen, L ist kontextfrei.

Dann $\exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall z \in L, |z| > N : \exists$ Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$, so dass $\forall i \in \mathbb{N} : uv^iwx^iy \in L$.

Sei nun $z = I^R \# I \$ I^R \# X[I]$ so dass $|I| > N$, also auch $|X[I]| > N$.

Wir zeigen nun, dass wir bei jeder Unterteilung durch Pumpen mit $i = 0$ ein Wort erzeugen können, das nicht in L ist.

Betrachten wir also eine Zerlegung $z = uvwxy$.

- Enthält vx eines der Trennsymbole $\#$ oder $\$$, so fällt dieses beim Pumpen mit 0 weg, das erzeugte Wort hat also nicht mehr die äußere Form $A \# B \$ C \# D$, ist also nicht mehr $\in L$.
- Enthält vx einen Teilstring eines der beiden Auftreten von I^R , so kann vx nicht gleichzeitig einen Teilstring des zweiten Auftretens von I^R enthalten. (Wegen $|I| > N$). Also wird beim Pumpen mit 0 das erste I^R zu $(I^R)'$ verkürzt, wohingegen das zweite I^R unverändert bleibt. Wegen $(I^R)' \neq I^R$ ist das Wort also nicht in der Sprache L .
- Besteht vx aus einem Teilstring von I , so bleiben beim Pumpen mit 0 die beiden Auftreten von I^R unverändert. I wird aber auf jeden Fall verkürzt, weswegen auch hier ein Wort erzeugt wird, das nicht in L liegt.
- Besteht vx aus einem Teilstring von $X[I]$, so wird $X[I]$ beim Pumpen mit 0 verkürzt. Da I jedoch unverändert geblieben ist, ist das erzeugte Wort nicht mehr von der Form $I^R \# I \$ I^R \# X[I]$ und deshalb nicht in L .

Daraus folgt, dass L keine kontextfreie Sprache ist.

Aufgabe 2

Sei KFG die Menge der Kontextfreien Grammatiken. Wir definieren uns folgende Sprache:

$L_1 := \{ \langle G \rangle \in KFG \mid L(G) \text{ enthält ein Palindrom positiver Länge} \}$

Zu zeigen: L_1 ist nicht entscheidbar. Dazu definieren wir uns die folgende Hilfssprache:

$L_2 := \{ \langle G_1 \rangle \$ \langle G_2 \rangle \mid \langle G_1 \rangle, \langle G_2 \rangle \in KFG, L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \}$ (wir nehmen an, dass $\langle G_1 \rangle$ und $\langle G_2 \rangle$ ihre Ableitungsregeln und auch die durch sie definierten Sprachen kein $\$$ enthalten)



In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass L_2 unentscheidbar ist. Daher genügt es zu zeigen, dass gilt: $L_2 \leq L_1$

Sei S_1 das Startsymbol von G_1 und S_2 das Startsymbol von G_2 . Wir konstruieren und nun eine TM, die wie folgt arbeitet:

1. Alle Ableitungsregeln von G_2 werden reversiert. Die neue Grammatik nennen wir G_2' . Offensichtlich gilt: $L(G_2') = L(G_2)^R$.
2. Die Ableitungsregeln von G_1 und G_2' werden auf das Ausgabeband kopiert.
3. Die neue Regel $S_3 \rightarrow S_1 \$ S_2'$ wird auf das Ausgabeband geschrieben und S_3 wird das Startsymbol unsere neuen Grammatik G_3 .

Die von unserer TM berechnete Funktion nennen wir f . Offensichtlich ist $L(G_3) = L(f(< G_1 > \$ < G_2 >)) = L(G_1) \$ L(G_2)^R$

Außerdem gilt:

$$L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\exists w : w \in L(G_1) \cap L(G_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists w : w \in L(G_1) \wedge w \in L(G_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists w : w \in L(G_1) \wedge w^R \in L(G_2') \Leftrightarrow$$

$$\exists w : w \$ w^R \in L(G_3) \Leftrightarrow$$

$L(G_3)$ enthält ein Palindrom positiver Länge

Die „ $\Leftarrow$ “-Richtung der letzten beiden Schritte gilt, da die Grammatiken G_1 und G_2 selber nach Voraussetzung kein $\$$ enthalten und jedes Wort in $L(G_3)$ genau ein $\$$ enthält, dass die Wörter der beiden Grammatiken trennt. Der Rest dürfte klar sein. Daraus folgt aber:

$x \in L_2 \Leftrightarrow f(x) \in L_1$. Damit haben wir die Reduzierbarkeit von L_2 auf L_1 bewiesen und können folgern, dass L_1 nicht entscheidbar ist.

Aufgabe 3

Die Aussage gilt i.A. nicht. Wir zeigen dies per Gegenbeispiel:

Sei $f(n) = n^n$ für gerade n und $f(n) = n^{n+1}$ für ungerade n .

Sei $g(m) = m^{m+1}$ für gerade m und $g(m) = m^m$ für ungerade m . Dann gilt:

$$\forall c_0 > 0 \exists n_0 = c_0: \forall n > n_0, n \text{ ungerade: } f(n) = n^{n+1} = n * n^n > c_0 * n^n = c_0 * g(n)$$

(da $n > c_0$, n ungerade)

Also $f \notin O(g)$. Weiter gilt:

$$\exists c_1 = 1 > 0 \exists n_1 = 0: \forall m > n_1, m \text{ gerade: } f(m) = m^m < m^{m+1} = c_1 * m^{m+1} = c_1 * g(m)$$

(da $c_1 = 1$, m gerade)

Also $f \notin \omega(g)$.

Damit ist die Aussage widerlegt.

Theoretische Informatik (WS05)

Prof. Dr. Raimund Seidel

Wei Ding

Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 10



Bemerkung: Die Aussage gilt natürlich auch nicht, wenn man f und g vertauscht. Es geht auch für stetige Funktionen (was hier aber nicht verlangt war!). Eine sinnvolle Wahl wäre z.B.:

g konstant (z.B. $g(x) = 1$)

$$f(x) = 1 + \min(1, 1/x) + \sin(x) * (1 + \max(0, x * \sin(x)))$$

Dieses f ist eine $2 - \pi$ -periodische Funktion, deren Maxima gegen unendlich gehen und deren Minima sich der x -Achse annähern.