



Aufgabe 1

Es sei $\Sigma = \{0, 1, \$\}$. Wir betrachten

$$L = \{u\$v \mid u \in SAM \text{ und } v \in \overline{SAM}\}.$$

Weder L noch $\overline{L}$ sind akzeptierbar.

a) Wir zeigen $\overline{SAM} \leq L$. Dazu konstruieren wir eine TM-berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ mit $x \in \overline{SAM} \iff f(x) \in L$.

Es sei M_1 eine Turing-Maschine mit $M_1 \in SAM$. Wir setzen $f(x) = \langle M_1 \rangle \x . Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in \overline{SAM} &\implies f(x) = \langle M_1 \rangle \$x \in L \\ x \notin \overline{SAM} &\implies x \in SAM \implies f(x) = \langle M_1 \rangle \$x \notin L. \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, daß $\overline{SAM}$ nicht akzeptierbar ist. Mit Behauptung f aus Aufgabe 1 ($L_1 \leq L_2$ und L_1 nicht akzeptierbar $\implies L_2$ nicht akzeptierbar) sehen wir, daß L nicht akzeptierbar ist.

b) Wir zeigen $\overline{SAM} \leq \overline{L}$. Dazu sei M_2 eine Turing-Maschine mit $M_2 \notin SAM$. Wir setzen $f(x) = x\$ \langle M_2 \rangle$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \in \overline{SAM} &\implies f(x) = x\$ \langle M_2 \rangle \notin L \implies f(x) \in \overline{L} \\ x \notin \overline{SAM} &\implies x \in SAM \implies f(x) = x\$ \langle M_2 \rangle \in L \implies f(x) \notin \overline{L}. \end{aligned}$$

Wie oben folgt, daß $\overline{L}$ nicht akzeptierbar ist.

Aufgabe 2

1. Eine Black Box Turing Maschine M , die die Sprache **UNIV** akzeptiert, verarbeitet eine Eingabe w folgendermaßen:

- Zunächst wird die Eingabe w Zeichen für Zeichen auf das zweite Arbeitsband kopiert.
- Danach wechselt die BB-TM in den Zustand $q_?$ und startet somit eine Anfrage an die Black Box.
- Nach dieser Anfrage befindet sich M genau dann im Zustand q_{nein} , wenn das Eingabewort w in **UNIV** liegt.
- Definieren wir den Zustand q_{nein} als den einzigen akzeptierenden Zustand von M , so ist $L(M) = \text{UNIV}$.



2. Analog dazu, wie wir gewöhnliche Turingmaschinen kodiert haben, können wir auch eine Kodierung für Black Box Turingmaschinen definieren. Dann betrachten wir die Sprache

$$\text{SAM-BB} = \{w \mid \text{BB-TM } M_w \text{ akzeptiert } w\}.$$

Wie in der Vorlesung können wir beobachten, dass die Sprache $\overline{\text{SAM-BB}}$ nicht von einer BB-TM akzeptiert werden kann, denn es gilt auch hier, dass

$$w \in \overline{\text{SAM-BB}} \Leftrightarrow w \notin L(M_w).$$

Damit liegt $\overline{\text{SAM-BB}}$ nicht in der Menge der BB-TM Sprachen, und es kann *nicht* jede Sprache einer BB-TM akzeptiert werden.

Aufgabe 3

- a) (k, X, Y) mit $X, Y \in (\Sigma^*)^k$ und $|\Sigma| = 1$

Sei (x_i, y_i) für $i = 1, \dots, n$ eine Instanz des PCP_a . Die Frage, ob es eine Indexfolge $(i_1, \dots, i_k)$ mit $k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = y_{i_1}, \dots, y_{i_k}$ gibt, ist äquivalent zu der Frage, ob es eine Indexfolge $(i_1, \dots, i_k)$ mit

$$\begin{aligned} |x_{i_1} \dots x_{i_k}| &= |y_{i_1} \dots y_{i_k}| \\ &= |x_{i_1}| + \dots + |x_{i_k}| \\ &= |y_{i_1}| + \dots + |y_{i_k}| \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$PCP_a \text{ unlösbar} \Leftrightarrow \forall i : |x_i| < |y_i| \text{ oder } \forall i : |y_i| < |x_i|.$$

$\Rightarrow$: Sei PCP_a unlösbar. Falls es ein (x_i, x_j) mit $|x_i| = |x_j|$ gibt, dann besitzt PCP_a eine Lösung (Widerspruch zur Annahme). Es gelte deshalb nun $|x_i| \neq |y_i|$ für alle i . Wir nehmen an, dass es ein j und ein k existieren mit $|x_j| > |y_j|, |x_k| < |y_k|$. Betrachte

$$n_1 := |x_j| - |y_j|, n_2 := |y_k| - |x_k|$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} |x_j^{n_2} x_k^{n_1}| &= (n_1 + |y_j|) * n_2 + (|y_k| - n_2) * n_1 \\ &= n_2 * |y_j| + n_1 * |y_k| \\ &= |y_j^{n_2} y_k^{n_1}|. \end{aligned}$$



Es gilt jetzt, dass $j^{n_2} * k^{n_1}$ eine Lösung des PCP_a ist.

$\Leftarrow$: Sei jetzt $|x_i| < |y_i|$ für alle i . Dann gilt $\forall (i_1, \dots, i_k), k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x_{i_1} \dots x_{i_k}| &= |x_{i_1}| + \dots + |x_{i_k}| \\ &< |y_{i_1}| + \dots + |y_{i_k}| \\ &= |y_{i_1} \dots y_{i_k}|. \end{aligned}$$

Also kann es keine nichttriviale Lösung geben.

Folgerung: Um PCP_a zu entscheiden, genügt es $|y_i| < |x_i|$ für alle i zu testen.

- b) Betrachten wir eine Karte (x_i, y_i) einer Instanz des PCP_Σ ,
mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $|x_i|, |y_i| \leq 5$.

Für x_i und y_i gibt es nun jeweils 3^i Möglichkeiten ein Wort der Länge i zu bilden, da $|\Sigma| = 3$.
Also gibt es insgesamt nur $d = (\sum_{i=0}^5 3^i)^2$ verschiedene Karten (x_i, y_i) .

Jede Instanz enthält nun eine Teilmenge dieser Karten.

Folglich gibt es $2^d \approx 1.86 * 10^{39885}$ Instanzen, also (endlich) viele.

PCP_Σ ist in diesem Fall also endlich, somit regulär und damit auch entscheidbar.