Aufgabe 1

Die Sprache, die dieser Automat beschreibt, ist genau L = w | w endet auf eine ungerade Anzahl von a's oder auf einer ungerade Anzahl von b's.

Der regulaere Ausdruck:

$$(a(aa)*) + ((a+b)*ba(aa)*) + (b(bb)*) + ((a+b)*ab(bb)*)$$

Man kann noch zusammenfassen als:

$$(((a+b)*b)*a(aa)*) + (((a+b)*a)*b(bb)*)$$

Aufgabe 2

a)

Sei $N \in \mathbb{N}$ frei vorgegeben.

Wähle $q = N^2,\ x = a^q \in L_0$

Dann gilt für jede Zerlegung $x = uvw = a^j a^k a^l$:

$|v| = k \geq 1$

und $|uv| = j + k \leq N \Rightarrow k \leq N$

$\Rightarrow$ Wähle $i = 2$

$\Rightarrow a^j a^{i \times k} a^l = a^j a^{2 \times k} a^l = a^{N^2+k}$

Nun gilt aber

$$N^2 \overset{k \geq 1}{<} N^2 + k$$

Desweiteren gilt:

$$(N+1)^2 = N^2 + 2 \times N + 1 \overset{N \geq k}{\geq} N^2 + 2 \times k + 1 > N^2 + k$$

Aus (1) und (2) folgt: $N^2 < N^2 + k < (N+1)^2$
$\Rightarrow N^2 + k$ ist keine Quadratzahl, $a^j a^{2 \times k} a^l \notin L_0$

$\Rightarrow$ Pumping Lemma gilt nicht für $L_0 \Rightarrow L_0$ ist keine reguläre Sprache.

b)

Sei $N \in \mathbb{N}$ frei vorgegeben.

Wähle $p \geq N + 2,\ p$ Primzahl und $x = a^p \in L_1$

Dann gilt für jede Zerlegung $x = uvw = a^j a^k a^l$:

$|v| = k \geq 1$

und $|uv| = j + k \leq N \Rightarrow l \geq 2$ (nach Konstruktion von p)

$\Rightarrow$ Wähle $i = j + l \Rightarrow a^j a^{i \times k} a^l = a^j a^{(j+l) \times k} a^l = a^{(j+l) \times (k+1)}$

$(j + l) \times (k + 1)$ ist keine Primzahl $\forall k \geq 1, l \geq 2 \Rightarrow a^{(j+l) \times (k+1)} \notin L_1$
$\Rightarrow$ Pumping Lemma gilt nicht für $L_1 \Rightarrow L_1$ keine reguläre Sprache.

Theoretische Informatik (WS05)
Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 4

Aufgabe 3

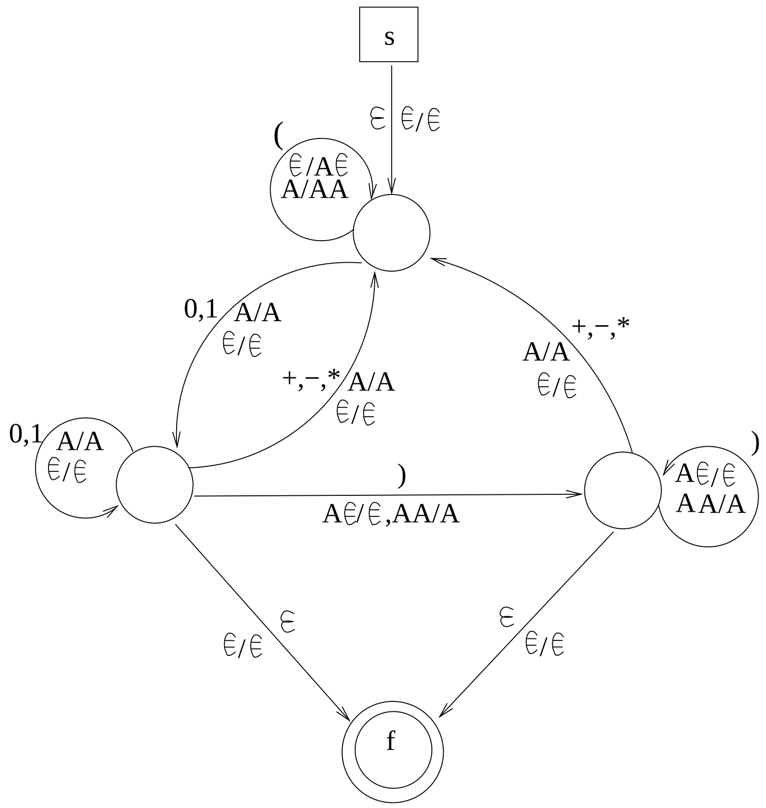

Abbildung 1: Lösung für Aufgabe 3

Aufgabe 4

Betrachten wir die Sprache $L_1 = \{b^j c^k | j,k \in \mathbb{N}, j \geq k\}$. Die Sprache L_1 ist nicht regulär. Beweis (mit Myhill-Nerode): es gilt $\forall j,k \in \mathbb{N}, j < k : c^k \in F_{L_1}(b^k) \wedge c^k \notin F_{L_1}(b^j) \Rightarrow F_{L_1}(b^k) \neq F_{L_1}(b^j)$. Trotzdem können wir die Wörter von L_1 *aufpumpen*: Sei $p = 1$ die Konstante des Pumping-Lemmas. Jedes Wort $w \in L_1$ wird in xyz zerlegt, mit $x = \epsilon$ und $|y| = 1$. Dann gilt $\forall l \in \mathbb{N}^+ : xy^l z \in L_1$. Das Problem ist, die Wörter der Form $b^j c^j$ können nicht *geschrumpft* werden: $xy^0 z = xz = b^{j-1} c^j \notin L_1$.

Um dieses Problem zu bearbeiten, wenden wir die reguläre Sprache $R_1 = \{a^i | i \in \mathbb{N}\}$ als Puffer an, indem wir sie mit L konkatenieren: $L_2 = R_1 \cdot L_1 = \{a^i b^j c^k | i,j,k \in \mathbb{N}, j \geq k\}$. Die Sprache L_2 ist wieder nicht regulär, kann aber (fast immer) *aufgepumpt* und *geschrumpft* werden: wir zerlegen jedes Wort $w \in L_2$ wieder in xyz, mit $x = \epsilon$ und $|y| = 1$. Jetzt haben wir, wenn $w = a^i b^j c^k$ (mit $i > 0$ und $j \geq k$), dann gilt $\forall l \in \mathbb{N} : xy^l z \in L_2$. Leider können Wörter der Form $w = a^0 b^j c^j = b^j c^j$ immer noch nicht *geschrumpft* werden, da $b^{j-1} c^j \notin L_2$.

Um unsere Probleme entgültig zu lösen, vereinigen wir L_2 mit der regulären Sprache $R_2 = \{b^j c^k | j,k \in \mathbb{N}\}$, die zwar alle problematischen Wörter $w = b^j c^j$ enthält, jedoch keine *Obermenge* von L_2 ist. $L_3 = L_2 \cup R_2$.

Da $R_2 \not\supset L_2$ ist L_3 nicht regulär: $\forall i,j,k \in \mathbb{N}, i > 0, j < k : c^k \in F_{L_3}(a^i b^k) \wedge c^k \notin F_{L_3}(a^i b^j) \Rightarrow F_{L_3}(b^k) \neq F_{L_3}(b^j)$. Allerdings erfüllt L_3 das Pumping-Lemma! Die Konstante des Pumping-Lemmas p wird wieder auf 1 gesetzt. Falls ein Wort w die Form $a^i b^j c^k$ (mit $i,j,k \in \mathbb{N}, i > 0, j \geq k$) hat, d.h. $w \in L_2 \subset L_3$, zerlegen wir w in xyz mit $x = \epsilon$ und $y = a$. Dann $\forall l \in \mathbb{N} : xy^l z \in L_2 \Rightarrow xy^l z \in L_3$. Wenn jetzt $w = a^0 b^j c^j = b^j c^j$, dann gilt $xy^0 z = xz = b^{j-1} c^j \notin L_2$, was aber kein Problem mehr ist, weil $b^{j-1} c^j \in R_2 \Rightarrow b^{j-1} c^j \in L_3$. Falls das Wort w die Form $b^j c^k$ (mit $j,k \in \mathbb{N}$) hat, kann es wieder wie oben in xyz zerlegt werden, nämlich mit $x = \epsilon$ und $|y| = 1$. Dann gilt $\forall l \in \mathbb{N} : xy^l z \in R_2 \Rightarrow xy^l z \in L_3$.

Im Allgemeinen kann eine nicht reguläre Sprache, die trotzdem das Pumping-Lemma erfüllt, mittels dreier Sprachen N, P und B konstruiert werden: N ist nicht regulär. P ist regulär, mit Pumping-Lemma-Konstante p_1 und mit der Eigenschaft, dass die Konkatenation $P \cdot N$ *nicht* regulär ist. Die Sprache B ist regulär mit Pumping-Lemma-Konstante $p_2 = p_1$ und den Eigenschaften:

- $(P \cdot N) \cup B$ ist *nicht* regulär,
- $(P \cap \Sigma^{\geq p_1}) \cdot N \not\subset B$,
- $(P \cap \Sigma^{< p_1}) \cdot N \subset B$.

Alle Wörter $w \in \{v | v \in P \wedge |v| \geq p_1\} \cdot N)$ können aufgepumpt und geschrumpft werden. Die Menge $(P \cap \Sigma^{\geq p_1}) \cdot N \not\subset B$ ist unter Aufpumpen abgeschlossen. Das geschrumpfte Wort kann aber auch in $(P \cap \Sigma^{< p_1}) \cdot N \subset B$ sein. Dann gehört es aber zur B und, folglich, kann weiter aufgepumpt und geschrumpft werden, wobei sich das Ergebnis vom Aufpumpen und Schrumpfen wieder in B befindet, d.h. B ist sowohl unter Aufpumpen als auch unter Schrumpfen abgeschlossen.

Ein Beispiel:

- $N = \{b^k | k$ ist ungerade Primzahl $\}$;
- $P = \{a^i | i$ ist gerade $\}$;
- $B = \{b^k | k$ ist ungerade $\}$;
- Pumping-Lemma-Konstante (von P und B) $p = 2$.