Theoretische Informatik (WS05)

Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

a)

$F_L(a^m) = \left\{a^i b^n a^{m+i+n} | n > 0, m+i > 0\right\}$
$F_L(a^m b^n) = \left\{b^i a^{m+n+i}\right\}$, falls $n > 0, m > 0$
$F_L(a^m b^n a^i) = \left\{a^{m+n-i}\right\}$, falls $m+n \geq i, m > 0, n > 0$
$F_L(w) = \{\}$, falls $w \notin \{a^m\} \cup \{a^m b^n\} \cup \left\{a^m b^n a^i\right\}$

$$\mathcal{F}_L = \left\{ (F_L(a^m))_{m \geq 0}, (F_L(a^m b^n))_{n>0,m>0}, \left(F_L(a^m b^n a^i)\right)_{m+n \geq i, m>0, n>0}, \{\} \right\}$$

(b)

$F_L(\epsilon) = L$
$F_L(wb) = \{a^m | m \leq 2\} \cup \{a^m bu | m \leq 2, u \in L\}$, falls $w \in L$
$F_L(wba) = \{a^m | m \leq 1\} \cup \{a^m bu | m \leq 1, u \in L\}$, falls $w \in L$
$F_L(wbaa) = \{\epsilon\} \cup \{bu | u \in L\}$, falls $w \in L$
$F_L(w) = \{\}$, falls $w \notin L$

$$\mathcal{F}_L = \left\{ (F_L(wba^m))_{0 \leq m \leq 2, w \in L}, L, \{\} \right\}$$

(c)

$F_L(w) = \{u \in \{a,b\}^* \, | \#_a(w) + \#_a(u) = \#_b(w) + \#_b(u)\}$, falls $w \in \{a,b\}^*$
$\mathcal{F}_L = \left\{ (F_L(w))_{w \in \{a,b\}^*} \right\}$

Aufgabe 2

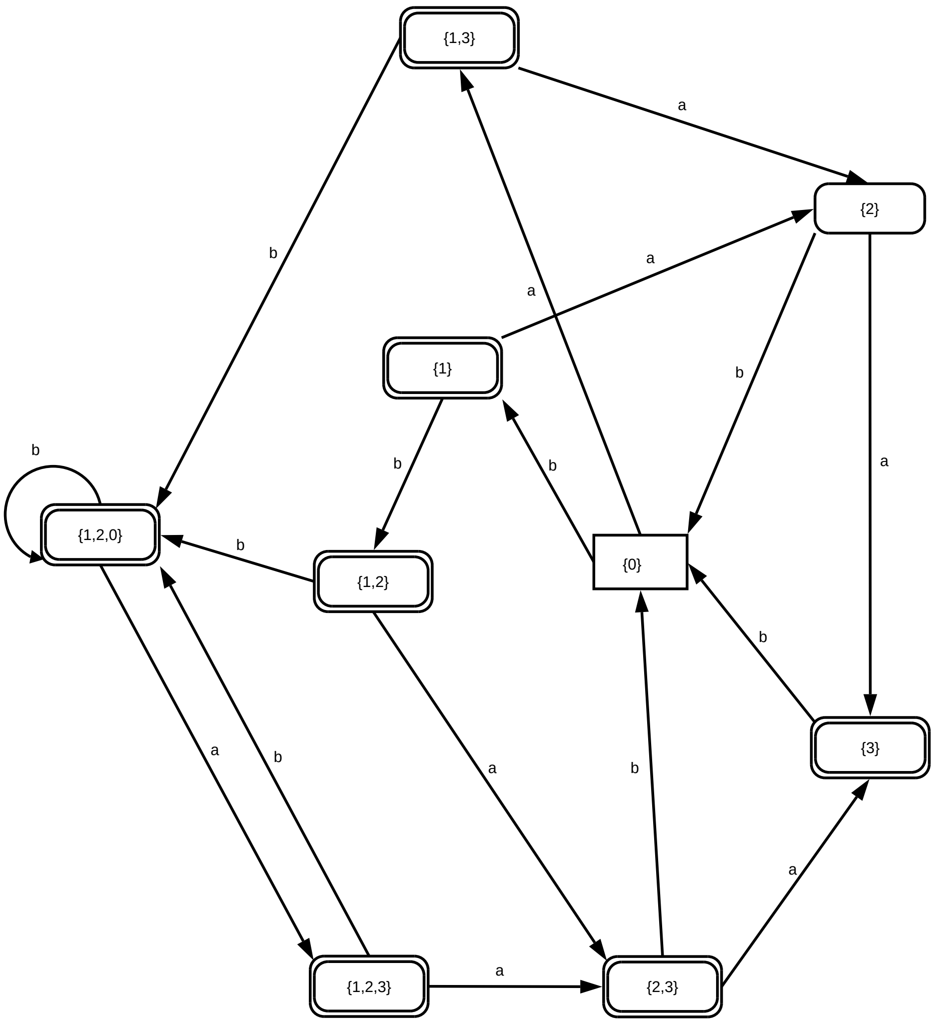

Abbildung 1: NEA → DEA

Aufgabe 3

Um einen minimalen DEA M' zu konstruieren, für den $L(M') = L(M)$ gilt, benutzen wir den Table-filling-Algorithmus. Dieser besteht aus zwei Regeln, die wie folgt angewendet werden: Man wendet zuerst Regel 1 solange an wie möglich, danach Regel 2 solange wie möglich.

Sei X := Unterscheidbares Paar;
Sei X_2 := Unterscheidbares Paar nach Regel 2;

$U = \{\{q, q'\} \mid q$ und q' sind unterscheidbar$\}$

Regel 1: $q \in F$, $q' \notin F \Rightarrow \{q, q'\} \in U$

Regel 2: $q, q' \in Q$, $a \in \Sigma$: $\{p\} = \delta_q(a)$, $\{p'\} = \delta_{q'}(a)$
$\{q, q'\} \in U \Rightarrow \{q, q'\} \in U$

1. Durchlauf:

$\{0, 1\}$ $a \longrightarrow \{1, 4\} \notin U$
$\{0, 1\}$ $b \longrightarrow \{2, 3\} \notin U$
$\Rightarrow \{0, 1\} \notin U$

$\{0, 2\}$ $a \longrightarrow \{1, 4\} \notin U$
$\{0, 2\}$ $b \longrightarrow \{2, 3\} \notin U$
$\Rightarrow \{0, 2\} \notin U$

$\{0, 3\}$ $a \longrightarrow \{1, 5\} \in U$
$\Rightarrow \{0, 3\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{0, 3\}$

$\{0, 4\}$ $a \longrightarrow \{1, 5\} \in U$
$\Rightarrow \{0, 4\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{0, 4\}$

$\{1, 2\}$ $a \longrightarrow \{4, 4\} \notin U$
$\{1, 2\}$ $b \longrightarrow \{3, 3\} \notin U$
$\Rightarrow \{1, 2\} \notin U$

$\{1, 3\}$ $a \longrightarrow \{, 5\} \in U$
$\Rightarrow \{1, 3\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{1, 3\}$

$\{1, 4\}$ $a \longrightarrow \{4, 5\} \in U$
$\Rightarrow \{1, 4\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{1, 4\}$

$\{2, 3\}$ $a \longrightarrow \{4, 5\} \in U$
$\Rightarrow \{2, 3\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{2, 3\}$

$\{2,4\}\ a \longrightarrow \{4,5\} \in U$
$\Rightarrow \{2,4\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{2,4\}$

$\{3,4\}\ a \longrightarrow \{5,5\} \notin U$
$\{3,4\}\ b \longrightarrow \{5,5\} \notin U$
$\Rightarrow \{3,4\} \notin U$

2. Durchlauf:

$\{0,1\}\ a \longrightarrow \{1,4\} \in U$
$\Rightarrow \{0,1\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{0,1\}$

$\{0,2\}\ a \longrightarrow \{1,4\} \in U$
$\Rightarrow \{0,2\} \in U$
$\Rightarrow$ markiere $\{0,2\}$

$\{1,2\}\ a \longrightarrow \{4,4\} \notin U$
$\{1,2\}\ b \longrightarrow \{3,3\} \notin U$
$\Rightarrow \{1,2\} \notin U$

$\{3,4\}\ a \longrightarrow \{5,5\} \notin U$
$\{3,4\}\ b \longrightarrow \{5,5\} \notin U$
$\Rightarrow \{3,4\} \notin U$

0						
1	X_2					
2	X_2					
3	X_2	X_2	X_2			
4	X_2	X_2	X_2			
5	X_1	X_1	X_1	X_1	X_1	
	0	1	2	3	4	5

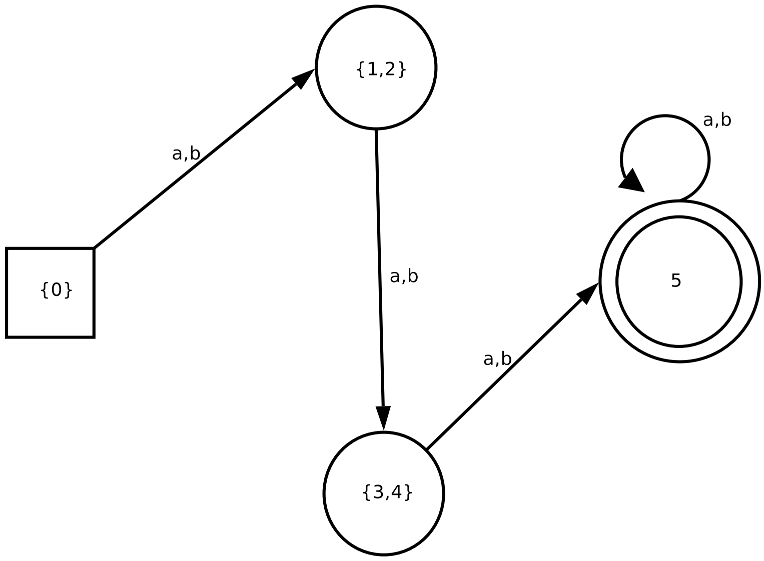

Abbildung 2: Minimal DEA

Aufgabe 4

Wir betrachten die Familie von Sprachen $\{L_k\}, k \in \mathbb{N}^+$, über dem Alphabet $\{a, b, \$\}$, mit $L_k := \{w|$ das k-letzte Symbol vor dem ersten Auftreten eines Dollarzeichens ist ein $a\} = \{(a, b)^* a(a, b)^{k-1}\$(a, b, \$)^*\}$.

Es gibt jetzt einen deterministischen 2-Wege-Automaten Z_k mit nur $k + 3$ Zuständen und $L(Z_k) = L_k$.

$Z_k = (\Sigma, Q, \delta, s, F)$ mit

$\Sigma = \{a, b, \$\}$;

$Q = \{1, 2, \dots, k\} \cup \{s, f, r\}$;

$F = \{f\}$;

$\delta = \{(s, \{a, b\}(s, \rightarrow)), (s, \$, (1, \leftarrow))\} \cup$
$\{(i, \Sigma, (i + 1, \leftarrow))\ \forall 1 \leq i < k\} \cup$
$\{(k, a, (f, \rightarrow)), (k, b, (r, \rightarrow))\} \cup$
$\{(f, \Sigma, (f, \rightarrow)), (r, \Sigma, (r, \rightarrow))\}$.

("$(s, \{a, b\}(s, \rightarrow))$" ist eine Kurzschreibweise mit der Bedeutung, dass wenn im Zustand s ein a *oder* ein b gelesen wird, dann übergeht der Automat in den Zustand s und bewegt den Kopf nach rechts. Analog für Σ bei anderen Regeln.)

Informale Beschreibung des Automaten: Soweit das erste Dollarzeichen noch nicht gefunden ist, bleibt Z_k im Startzustand s und bewegt den Lesekopf nach rechts. Wenn das erste \$ gelesen wird, dann übergeht Z in den Zustand 1 und bewegt den Lesekopf nach links, wechselt wieder zum Zustand 2 und bewegt den Lesekopf nach links usw. bis das k-letzte Symbol vor dem ersten \$ erreicht wird (oder der Automat blockiert mangels eines solchen Symbols). Der Automat ist jetzt im Zustand k. Dann prüft Z_k ob das Symbol unter dem Lesekopf ein a ist und im positiven Fall akzeptiert, indem er in den Akzeptierzustand f übergeht und den Rest der Eingabe liest. Sonst lehnt er die Eingabe ab, indem er in Zustand r wechselt und wieder den Rest der Eingabe liest.

Andererseits, jeder DEA M_k mit $L(M_k) = L_k$ hat mindestens 2^k Zustände; denn er muss sich an die k-letzten eingelesenen Symbolen erinnern, genauer merken welche von ihnen a's waren. Wenn der DEA weniger als 2^k Zustände hat, dann existieren zwei Präfixe u und v mit $u, v \in \{a, b\}, |u| = |v| = k$ und $u \neq v$, so dass M_k in den selben Zustand gerät, wenn er diese Präfixe einliest, d.h. M_k kann zwischen u und v nicht unterscheiden. Da $u \neq v$, unterscheiden sich u und v mindestens an einer Stelle i, $1 \geq i \geq k$. Sei o.b.d.A. das i-te Symbol von u ein a und das i-te Symbol von v ein b. Sei x ein Wort über $\{a, b\}$ mit $|x| = i$. M_k entweder akzeptiert beide Wörter $ux\$$ und $vx\$$ oder er lehnt beide ab, weil er nach dem Einlesen von u bzw. v in den selben Zustand gerät, obwohl er eigentlich $ux\$$ akzeptieren und $vx\$$ ablehnen sollte.

Daraus folgt, dass die Sprachen $\{L_k\}$ von deterministischen 2-Wege-Automaten mit nur $\mathcal{O}(k)$ Zuständen, aber von DEA'n mit $\Omega(2^k)$ Zuständen erkannt werden können.

(Allerdings kann L_k von einem *nicht-deterministischen* endlichen Automaten mit $\mathcal{O}(k)$ Zuständen erkannt werden.)