Theoretische Informatik (WS05)

Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

Ist die Menge aller unendlichen Folgen über $\mathbb{B}$ gleichmächtig wie die Menge aller unendlichen Folgen über $\mathbb{N}$? Ja, sie ist.

Beweis:

Wir konstruieren eine Bijektion $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ wie folgt:

Wir schreiben die unendliche Folge $F = n_0, n_1, n_2, \ldots$ über $\mathbb{N}$ um, indem wir jedes Element von ihr in Unärdarstellung als eine endliche Folge von Einsen darstellen: $1^{n_0}, 1^{n_1}, 1^{n_2}, \ldots$. Dann konkatenieren wir alle Unärdarstellungen mit der 0 als Trennsymbol: $1^{n_0}01^{n_1}01^{n_2}0\ldots$. Schließlich trennen wir die Ziffern durch Kommata: $(1,)^{n_0}0, (1,)^{n_1}0, (1,)^{n_2}0, \ldots$ und erhalten damit eine unendliche Folge über $\mathbb{B}$.

Die oben beschriebene Transformation ist offensichtlich injektiv. Leider ist sie aber nicht surjektiv. Jede unendliche Folge über $\mathbb{B}$ mit unendlich vielen Nullen kann als die eindeutige Kodierung einer unendlichen Folge über $\mathbb{N}$ auf die oben beschriebene Weise interpretiert werden. Aber wie würde eine Folge mit nur endlich vielen Nullen und, folglich, unendlich vielen Einsen, d.h. eine Folge der Form $(0,1)^*1^\omega$ interpretiert? (1^ω bedeutet unendlich viele Wiederholungen der 1.)

Deswegen scheint es nötig, die Funktion ein bisschen komplizierter zu definieren.

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1. Fall: in der Folge F kommen Zahlen größer als Null unendlich oft vor. Dann kodieren wir die Folge wie oben beschrieben.

2. Fall: in der Folge F kommen Zahlen größer als Null nur endlich oft vor, d.h. die Folge hat die Form $\mathbb{N}^*0^\omega$.

Dann unterscheiden wir 2 Unterfälle:

2a. Die erste Zahl n_0 der Folge ist gerade. Dann kodieren wir die Folge wie oben, mit dem einzigen Unterschied, dass die erste Zahl nicht als 1^{n_0}, sondern als $1^{n_0/2}$ kodiert wird.

2b. Die erste Zahl n_0 der Folge ist ungerade. Dann kodieren wir die Folge wie oben, mit zwei Unterschieden: erstens, die Eins und die Null tauschen Rollen, d.h. wir verwenden die Eins als Trennsymbol und die Null für die Unärdastellung und zweitens, die erste Zahl wird nicht als 0^{n_0}, sondern als $0^{(n_0-1)/2}$ kodiert.

Die neue Transformation ist wieder injektiv. Behauptung: sie ist auch surjektiv.

Um das letzte zu beweisen, zeigen wir, dass für jede unendliche Folge über $\mathbb{B}$ eine Interpretation finden können.

Falls beide Symbole 0 und 1 unendlich oft vorkommen, dann interpretieren wir sie als Unärdastellung einer Folge über $\mathbb{N}$ mit der Null als Trennsymbol (entspricht dem ersten Fall).

Falls die Einsen nur endlich oft vorkommen, d.h. falls die Folge die Form $(0,1)^*0^\omega$ hat, dann interpretieren wir die Null als Trennsymbol und die erste Zahl als ihr Zweifaches (entspricht dem Fall 2a). Z.B., die Folge $0, 0, 0, \ldots$ wird als $0, 0, 0, \ldots$ und die Folge $1, 0, 0, \ldots$ als $2, 0, 0, \ldots$ interpretiert.

Falls jetzt die Nullen endlich oft vorkommen, d.h. falls die Folge die Form $(0, 1)^*1^\omega$ hat, dann interpretieren wir die Eins als Trennsymbol und die erste Zahl als ihr Zweifaches plus eins (entspricht dem Fall 2b). Z.B., die Folge $1, 1, 1, \ldots$ wird als $1, 0, 0, \ldots$ und die Folge $0, 1, 1, \ldots$ als $1, 0, 0, \ldots$ interpretiert.

Die Transformation ist nun bijektiv geworden und damit folgt die Gleichmächtigkeit von $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ und $\mathbb{B}^\mathbb{N}$ (nach Definition).

Aufgabe 2

2.a

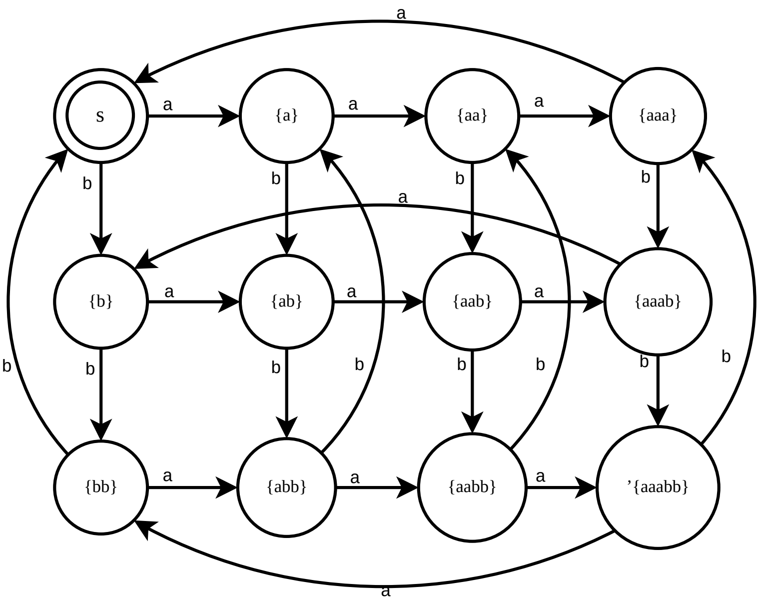

Abbildung 1: $L_0 = \{w \in \{a, b\}^* | \#_a(w)\ \mathit{durch}\ 4\ \mathit{teilbar}\ \mathit{und}\ \#_b(w)\ \mathit{durch}\ 3\ \mathit{teilbar}\}$

Theoretische Informatik (WS05)

Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 2

2.b

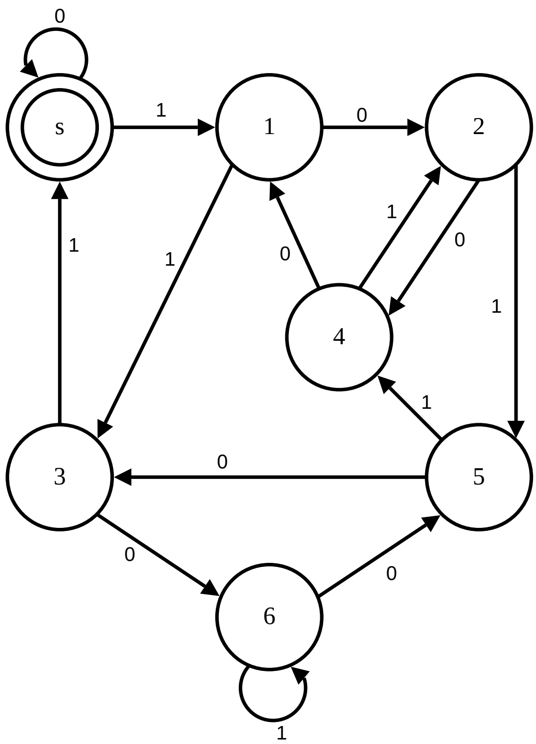

Abbildung 2: $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* | < w > \ \textit{durch 7 teilbar}\}$

2.c Sei $w_n = 10^n 10^{n+2} 1$.
Dann gilt $\forall n \in N \ \langle w_n \rangle = 2^{2n+4} + 2^{n+3} + 1 = (2^{n+2}+1)^2$
und somit $10^{n+2}1 \in F_{L_2}(10^n)$

Wir können nun zeigen, dass $\forall k \geq 1, m = (2k+1)n$ gilt, dass $10^{n+2}1 \notin F_{L_2}(10^m)$

$X = \left\langle 10^m 10^{n+2} 1 \right\rangle = 2^{m+n+4} + 2^{n+3} + 1$
$= 2^{(2k+1)n+n+4} + 2^{n+3} + 1$
$= (2^{(k+1)n+2})^2 + 2^{n+3} + 1$

Weil $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ und
$2 * 2^{(k+1)n+2} + 1 = 2^{(k+1)n+3} + 1 > 2^{n+3} + 1$, $\forall k \geq 1$ ist X keine Quadratzahl $\forall k \geq 1$.

Somit gilt $\forall k \geq 1 \ 10^{n+2} \notin F_{L_2}(10^{(2k+1)n})$
und $\forall n \in N \forall k \geq 1$, dass $F_{L_2}(10^n) \neq F_{L_2}(10^{(2k+1)n})$.

Somit erhalten wir unendlich viele Fortsetzungssprachen.

L_2 ist also nicht regulär.

2.d Seien p und q zwei Primzahlen mit $p \neq q, p \geq 3$.
Dann gilt $ggt(p, q * 2^{|p|}) = 1$, weil p und $q * 2^{|p|}$ teilerfremd sind.
Nach dem Satz von Dirichlet gilt: $\exists i \in N$, so dass $p + i * (q * 2^{|p|})$ prim.
Sei weiterhin $bin(x) \in \{0,1\}^*$ die Binaŕdarstellung von x, dann gilt:
$(bin(i * q)bin(p))^R \in L_3$ und
$(bin(i * q)bin(q))^R \notin L_3$.

Damit ist $bin(i * q)^R \in F_{L_3}(bin(p)^R)$ und $bin(i * q)^R \notin F_{L_3}(bin(q)^R)$.
Somit erhalten wir unendlich viele Fortsetzungssprachen und L_3 ist nicht regulär.

Aufgabe 3

1) Komplement

L DEA-Sprache $\Rightarrow \exists$ DEA $M = \{\Sigma, Q, s \in Q, F \subset Q, \Delta\}$ mit L(M) = L
Ich konstruiere einen DEA $M' = \{\Sigma', Q', s' \in Q', F' \subset Q', \Delta'\}$, der $\overline{L}$ akzeptiert:

$\Sigma' = \Sigma$ per Definition
$Q' := Q \cup \{\omega\}$
$s' := s$
$F' := Q' \backslash F$
$\Delta' := \Delta \cup \{(q, a, \omega) | \nexists (q, a, p) \in \Delta : p \in Q\}$

$(L(M') = \overline{L}) \Rightarrow \overline{L}$ regulär

2) Schnitt

Seien $M = \{\Sigma, Q, s \in Q, F \subset Q, \Delta\}$, $M' = \{\Sigma', Q', s' \in Q', F' \subset Q', \Delta'\}$ die DEAs zu L,L'.

Ich konstruiere den DEA $M'' = \{\Sigma'', Q'', s'' \in Q'', F'' \subset Q'', \Delta''\}$ für den Schnitt auf folgende Art und Weise:

$\Sigma'' = \Sigma = \Sigma'$ per Definition
$Q'' := Q \times Q'$
$s'' := (s, s')$
$F'' := \{(f, f') | (f \in F) \wedge (f' \in F')\}$
$\Delta'' := \{((q, q'), a, (p, p')) | (q, a, p) \in \Delta \wedge (q', a'p') \in \Delta'\}$

$(L(M'') = L \cup L') \Rightarrow L \cup L'$ regulär

3) Vereinigung

Ergibt sich aus 1, 2 und der De-Morgan'schen Formel :
L,L' regulär
$\Rightarrow \overline{L}$ regulär $\wedge$ $\overline{L'}$ regulär
$\Rightarrow (\overline{L} \cap \overline{L'})$ regulär
$\Rightarrow \overline{(\overline{L} \cap \overline{L'})}$ regulär
$\Rightarrow (L \cup L')$ regulär