



Aufgabe 1

1. Es ist zu zeigen, daß der Begriff der Abzählbarkeit einer Menge M , so wie er in der Vorlesung definiert wurde, eine äquivalente Charakterisierung der Begriffe nummerierbar und aufzählbar ist.

- Abzählbarkeit: entweder ist M endlich oder $\exists$ bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$, d.h. es existiert auch eine bijektive Abbildung $f^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow M$
- Nummerierbarkeit: $\exists$ surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow M$, d.h. $\forall m \in M \exists x \in \mathbb{N}$ mit $g(x) = m$
- Aufzählbarkeit: $\exists$ injektive Abbildung $h : M \longrightarrow \mathbb{N}$, d.h. für $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $h(x) \neq h(y)$

Bevor wir die Äquivalenz der Begriffe Abzählbarkeit, Nummerierbarkeit und Aufzählbarkeit zeigen, geben wir eine wichtige Eigenschaft der Teilmengen von $\mathbb{N}$ an:

Jede Teilmenge $T \subset \mathbb{N}$ ist abzählbar! Dies ist sehr einfach einsehbar: Entweder ist T eine endliche Menge, dann sind wir fertig. Oder aber T ist nicht endlich. Weil T eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, kann man die Elemente der Größe nach geordnet hinschreiben: $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_j, \dots$. Damit ist die Abbildung $f : T \longrightarrow \mathbb{N}$, $f(i_j) = j$ eine Bijektion.

Zu zeigen ist nun :

- **M abzählbar $\Rightarrow M$ aufzählbar**

M ist abzählbar, d.h. M ist endlich oder $\exists$ bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$. Wenn M endlich ist, dann kann man jedem Element von M genau eine Zahl i mit $1 \leq i \leq |M|$ zuweisen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $h : M \longrightarrow \{1, \dots, |M|\}$. Fasst man h nun als Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ auf, so ist h immer noch injektiv. Wenn M nicht endlich ist, dann gibt es eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow \mathbb{N}$. Daraus folgt insbesondere, dass f injektiv ist.

- **M aufzählbar $\Rightarrow M$ abzählbar**

M aufzählbar, d.h. $\exists$ injektive Abbildung $h : M \longrightarrow \mathbb{N}$. Wenn M endlich ist dann ist es klar, dass M auch abzählbar ist. Andernfalls muss man zeigen, dass es eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow T$ mit $T \subset \mathbb{N}$ gibt. Dazu schränken wir jetzt die Zielmenge $\mathbb{N}$ folgendermaßen ein:

$$T := \{h(x) \in \mathbb{N} \mid x \in M\}.$$

Betrachtet man nun die Abbildung $f : M \longrightarrow T$ mit $f(m) = h(m)$ für alle $m \in M$ so ist f wohl definiert. Weil h injektiv war ist auch f injektiv und aufgrund der Konstruktion von T ist f auch surjektiv.

$\Rightarrow$ Abbildung $f : M \longrightarrow T$ ist bijektiv. $\Rightarrow M$ ist **abzählbar**.



- **M abzählbar $\Rightarrow M$ nummerierbar**

M ist abzählbar, d.h. M ist endlich oder $\exists$ bijektive Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{N}$. Wenn M endlich ist, dann kann man jedem Element von M genau eine Zahl i mit $1 \leq i \leq |M|$ zuweisen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung $g : \{1, \dots, |M|\} \rightarrow M$. Erweitert man g nun auf eine Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow M$, indem man die Elemente $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |M|$ auf ein beliebiges Element $m \in M$ abbildet, so ist g immer noch surjektiv. Wenn M nicht endlich ist, dann gibt es eine bijektive Abbildung $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow M$. Daraus folgt insbesondere, dass f^{-1} surjektiv ist.

- **M ist nummerierbar $\Rightarrow M$ abzählbar**

M nummerierbar, d.h. $\exists$ surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow M$. Wenn M endlich ist dann ist es klar, dass M auch abzählbar ist. Andernfalls muss man zeigen, dass es eine bijektive Abbildung $f : T \rightarrow M$ mit $T \subset \mathbb{N}$ gibt. Dazu betrachten wir die Funktion $k : M \rightarrow \mathbb{N}$, die definiert ist durch

$$k(m) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = m\}$$

und definieren

$$T = \{k(m) \mid m \in M\}.$$

Die Funktion $f : T \rightarrow M$ mit $f(t) = g(t)$ ist nun nach Konstruktion bijektiv. $\Rightarrow$ **M ist abzählbar.**

2. Es ist zu zeigen, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist. Es gilt : $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$. Im folgenden wird gezeigt, daß $\mathbb{Q}^+$ abzählbar ist. $\mathbb{Q}^-$ lässt sich analog beweisen und die Menge $\{0\}$ als einelementige Menge ist schon abzählbar. Da wir wissen, dass die Vereinigung von drei abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, sind wir damit dann fertig.

Die einfachste Weise zu zeigen, daß $\mathbb{Q}^+$ abzählbar ist, ist alle Elemente von $\mathbb{Q}^+$ aufzuzählen. Das Problem dabei ist zu gewährleisten, daß jedes Element von $\mathbb{Q}^+$ genau einmal in der Liste erscheint. Um eine Liste aller positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ zu erhalten, erstellen wir eine Matrix wie in der Abbildung angegeben.

Die i -te Reihe enthält alle Elemente mit dem Zähler i , die j -te Spalte alle Elemente mit dem Nenner j . Diese Matrix wird nun in eine Liste umgewandelt. Die Elemente werden entsprechend ihrer

Diagonalen (siehe Abbildung) aufgelistet. Die erste Diagonale enthält das Element $\frac{1}{1}$. Die zweite Diagonale die Elemente $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$. In der dritten Diagonalen würden wir jetzt die Elemente $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$ hinzufügen. Würden wir aber $\frac{2}{2}$ hinzufügen, so käme das Element $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$ doppelt vor. Solche Elemente, die in der Liste schon enthalten sind, werden einfach übersprungen. Auf diese Art und Weise bekommt man eine Auflistung von $\mathbb{Q}^+$.

$\Rightarrow \mathbb{Q}^+$ ist abzählbar. $\Rightarrow \mathbb{Q}$ ist abzählbar.

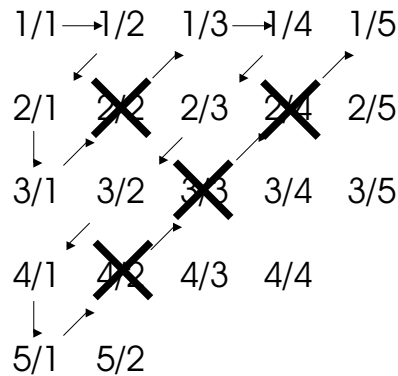


Abbildung 1: Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Aufgabe 2

a)

Zunächst einmal ist $\mathbb{N}$ abzählbar und damit auch $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Cantor). Wenn aber $\mathbb{N}^2$ abzählbar ist, dann auch $\mathbb{N}^3$, usw. und damit alle $\mathbb{N}^k$, $k \in \mathbb{N}$ (beweisbar per Induktion). Um nun eine Abzählung von $\mathbb{N}^*$ zu bekommen, schreiben wir die Elemente der einzelnen Mengen gemäß ihrer Aufzählung von links nach rechts und die einzelnen $\mathbb{N}^k$ von oben nach unten. Mit dem Diagonalsierungsverfahren von Cantor erhalten wir so wieder eine Abzählung (Im Folgenden sei $f(k, n)$ das n -te Element von $\mathbb{N}^k$):

$$\begin{array}{cccc}
 f(0, 1) & & & \\
 f(1, 1) & f(1, 2) & f(1, 3) & f(1, 4) \dots \\
 f(2, 1) & f(2, 2) & f(2, 3) & f(2, 4) \dots \\
 f(3, 1) & f(3, 2) & f(3, 3) & f(3, 4) \dots \\
 \dots & & &
 \end{array}$$

b)

Wir bauen eine Funktion $g(t) : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, welche die Elemente der Tupel aus $\mathbb{N}^*$ als Exponenten der Primfaktoren der Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl interpretiert. Um auch die 0 als Element von $\mathbb{N}$ betrachten zu können, müssen wir auch die Größe des Tupels (= die Anzahl seiner Elemente) beachten, da (1, 2) ansonsten auf die gleiche Zahl wie (1, 2, 0) abgebildet werden würde.

Im Folgenden sei $h(n, t)$ das n -te Element des Tupels $t \in \mathbb{N}^*$, $a(t)$ sei die Anzahl der Elemente in t und $p(n)$ die n -te Primzahl. Dann kann man folgende bijektive Abbildung bauen:



$$g(t) = 0, \text{ falls } t = ()$$

$$g(t) = p(a(t)) \times \left(\prod_{n=1}^{a(t)} p(n)^{h(n,t)} \right) - 1, \text{ falls } t \neq ()$$

Das Tupel $(2, 1, 1)$ wird also z.B. auf $2^2 \times 3^1 \times 5^{1+1} - 1 = 299$ abgebildet. Da sowohl $a(t)$ als auch $h(n, t)$ alle Werte aus $\mathbb{N}$ annehmen können und $p(n)$ für $n \geq 1$ alle Primzahlen ≥ 2 liefert, werden alle möglichen Primfaktorzerlegungen erzeugt. Der zusätzliche Faktor $p(a(t))$ verhindert, dass (0) , $(0, 0)$, $(0, 0, 0)$ alle auf 1 abgebildet werden. Stattdessen erzeugen diese Tupel genau die Zahlen, deren Nachfolger Primzahlen sind. Das -1 am Ende der Funktionsgleichung sorgt dafür, dass wir auch die 1 treffen. Dass es sich hierbei um eine Abbildung nach $\mathbb{N}$ handelt, ist offensichtlich. Da sich jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt und alle möglichen Primfaktorzerlegungen erzeugt werden, ist die Abbildung surjektiv. Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl eindeutig ist, ist die Abbildung zudem injektiv.

Aufgabe 3

Ja, die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Beweis:

Da die Dezimaldarstellung einer algebraischen Zahl $a \in \mathbb{A}$ aus *unendlich* vielen Ziffern bestehen kann, ist sie für unsere Zwecke eher ungeeignet. Allerdings können wir jedes $a \in \mathbb{A}$ durch eine *endliche* Zeichenkette darstellen. Nach Definition von $\mathbb{A}$, gibt es zu jedem $a \in \mathbb{A}$ (mindestens) ein Polynom p , so dass a eine Nullstelle von p ist. Dann stellen wir a wie folgt dar:

”Die i -te Nullstelle des Polynoms $z_0 \cdot x^0 + z_1 \cdot x^1 + \dots + z_k \cdot x^k$ ”

wobei $i \in \mathbb{N}^+$ und $z_0, z_1, \dots, z_k \in \mathbb{Z}$. Z.B. die Zahl $\sqrt{2}$ kann als

”Die 2-te Nullstelle des Polynoms $-2 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2$ ”

dargestellt werden. Eine noch kompaktere Darstellung wäre das Tupel:

$$(i, z_0, z_1, \dots, z_k).$$

Die Zahl $\sqrt{2}$ würde in diesem System als

$$(2, -2, 0, 1)$$

kodiert. Wir können auch alle negativen Zahlen loswerden, indem wir die Vorzeichen $+$ und $-$ als die Zahlen 1 bzw. 2 kodieren:

$$(i, s_0, n_0, s_1, n_1, \dots, s_k, n_k)$$

mit $i \in \mathbb{N}^+$, $s_0, s_1, \dots, s_k \in \{1, 2\}$, $n_0, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl $\sqrt{2}$ wird jetzt als

$$(2, 2, 0, 1, 0, 1, 1)$$

dargestellt. (0 weisen wir das Vorzeichen $+$ zu.)



(Alternativ können wir alle $z \in \mathbb{Z}$ injektiv nicht auf $\mathbb{N}^2$, sondern auf $\mathbb{N}$ mithilfe der Funktion $j(z) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $j(n) = -2 \cdot n$, falls $n < 0$, $j(n) = 2 \cdot n - 1$, falls $n > 0$ und $j(n) = 0$, falls $n = 0$ abbilden.)

Damit haben wir eine Funktion $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{N}^*$ konstruiert. f ist injektiv, da jedes Tupel in $\mathbb{N}^*$ höchstens einem $a \in \mathbb{A}$ entspricht.

Aber $\mathbb{N}^*$ ist laut Aufgabe 2 abzählbar. Nach Definition der Abzählbarkeit und wegen der Unendlichkeit von $\mathbb{N}^*$, existiert eine Bijektion $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $h(a) = g(f(a))$ injektiv. Daraus folgt, dass $\mathbb{A}$ *aufzählbar* im Sinne der Aufgabe 1, und damit auch abzählbar ist.

Aufgabe 4

Führen wir die in der Aufgabe formulierte Konstruktion analog für die rationalen Zahlen durch, so werden wir im folgenden beweisen, dass wir damit keine vollständige Überdeckung des Intervalls $[0, 1]$ erreichen müssen. Damit gilt eine wesentliche Beobachtung des Beweises hier nicht mehr, und wir können das Verfahren nicht wörtlich übertragen.

Zunächst stellen wir folgendes fest: Ordnen wir eine gegebene Aufzählung der rationalen Zahlen beliebig um, so erhalten wir wieder eine solche Aufzählung.

Wählen wir uns eine beliebige irrationale Zahl r im Intervall $[0, 1]$, dann liegen in jeder noch so kleinen Umgebung um diese stets auch rationale Zahlen. Ist nun der Abstand zwischen einer rationalen Zahl q und r gleich ε , so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\varepsilon > 10^{-k}$ ist. Ordnen wir eine gegebene Aufzählung so um, dass q darin frühestens an Position k vorkommt, so ist r *nicht* in dem q umgebenden Intervall enthalten. Insgesamt können wir damit eine Umordnung konstruieren, in der alle Zahlen, die nahe bei r liegen hinreichend spät aufgezählt werden. Danach wird r auch nicht in der Vereinigung aller die rationalen Zahlen umgebenden Intervalle enthalten sein, und die Überdeckung ist nicht vollständig.