



1. (8 Punkte) Für Mengen A und B bezeichnen wir mit B^A die Menge aller Funktionen von A nach B . Zum Beispiel ist also $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$, also die Menge aller unbeschränkten Bitfolgen.

Ist die Menge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ gleichmächtig wie die Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. (16 Punkte) In dieser Aufgabe sollen Sie für einige Sprachen zeigen, ob sie DEA-Sprachen sind oder nicht. Im positiven Fall sollen sie das durch einen geeigneten endlichen Automaten, dargestellt durch seinen Übergangsgraphen, beweisen. Den negativen Fall sollen Sie durch das Zeigen von unendlich vielen Fortsetzungssprachen beweisen.

Für ein Wort $w \in \Sigma$ und Symbol $a \in \Sigma$ bezeichnen wir mit $\#_a(w)$ die Anzahl der Vorkommnisse des Symbols a im Wort w . Also für $w = bbacaabb$ gilt $\#_a(w) = 3$, $\#_c(w) = 1$, und $\#_d(w) = 0$.

Für ein Wort $w = w_0w_1 \cdots w_k \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit w^R das gespiegelte Wort, also $w^R = w_k \cdots w_1w_0$.

Für einen Bitstring u bezeichnen wir $\langle u \rangle$ die natürliche Zahl, die durch u binär dargestellt wird; also $\langle u_{k-1}u_{k-2} \cdots u_1u_0 \rangle = \sum_{0 \leq i < k} u_i 2^i$.

Hier sind vier zu untersuchende Sprachen.

- (a) $L_0 = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \text{ durch } 4 \text{ teilbar und } \#_b(w) \text{ durch } 3 \text{ teilbar}\}$
 - (b) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle \text{ durch } 7 \text{ teilbar}\}$
 - (c) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w \rangle \text{ ist eine Quadratzahl}\}$
 - (d) $L_3 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \langle w^R \rangle \text{ ist eine Primzahl}\}$
3. (6 Punkte)
Beweisen Sie: Wenn $L, L' \subset \Sigma^*$ DEA-Sprachen sind, dann ist das Komplement $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ eine DEA-Sprache und $L \cap L'$ sowie $L \cup L'$ sind ebenfalls DEA-Sprachen.