1. (10 Punkte) Es sei Σ ein Alphabet mit mindestens zwei Buchstaben und $\#, \$ \notin \Sigma$. Für $X = (x_1, \ldots, x_k) \in (\Sigma^+)^k$ und $Y = (y_1, \ldots, y_k) \in (\Sigma^+)^k$ definiere die Sprachen

$$L_X = \{ \; I^R \# K \$ K^R \# X[I] \mid I, K \in \{1, \ldots, k\}^+ \; \}$$

$$L_Y = \{ \; J^R \# J \$ H^R \# Y[H] \mid J, H \in \{1, \ldots, k\}^+ \; \}$$

wobei für $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \cdots, k\}$ wir die Notation $X[I] = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ und $Y[I] = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m}$ verwenden.

Beweisen Sie ausführlich: Wenn $L_X \cap L_Y \neq \emptyset$, dann ist $L_X \cap L_Y$ keine kontextfreie Sprache.

2. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass es im Allgemeinen nicht entscheidbar ist, ob eine vorgegebene kontextfreie Grammatik eine Sprache generiert, die ein Palindrom positiver Länge enthält.

3. (10 Punkte) Stimmt folgende Aussage für alle fast überall positiven Funktionen f und g:

$$f \notin O(g) \Longleftrightarrow f \in \omega(g)$$

Im positiven Fall geben Sie einen Beweis an. Im negativen Fall geben Sie ein Gegenbeispiel mit einer Erklärung an.