



1. (12 Punkte)

- (a) Wir nennen eine Menge M *nummerierbar*, wenn es eine surjektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M gibt. Sie heißt *aufzählbar*, wenn eine injektive Abbildung von M nach $\mathbb{N}$ existiert.

Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung definierte Begriff der Abzählbarkeit eine äquivalente Charakterisierung dieser *beiden* Begriffe ist. D.h., zeigen Sie, dass abzählbare Mengen auch nummerierbar und aufzählbar sind, und dass nummerierbare bzw. aufzählbare Mengen auch abzählbar sind.

- (b) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen abzählbar ist.

2. (12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ abzählbar ist.

- (b) Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ an.

3. (6 Punkte)

Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie eine Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, die nicht alle Null sind. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der algebraischen Zahlen. Offensichtlich gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{R}$.

Ist $\mathcal{A}$ abzählbar?

4. (Zusatzaufgabe; 5 Punkte)

Man kann folgendermaßen beweisen, dass die Menge der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ nicht abzählbar ist:

Wir nehmen das Gegenteil an und betrachten eine Aufzählung der Elemente in $[0, 1]$. Das i -te Element dieser Aufzählung umgeben wir mit einem Intervall $I_i \subset [0, 1]$ der Länge 10^{-i} , $i = 1, 2, 3, \dots$. Die Vereinigung $\bigcup_{i \geq 1} I_i$ ergibt eine vollständige Überdeckung des Intervalls $[0, 1]$. Betrachtet man jedoch die Summe der Intervalllängen $\sum_{i \geq 1} |I_i|$, so erhält man einen Wert kleiner als 1. (Warum?) Damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet.

Wir übertragen diesen Beweis nun wörtlich auf die rationalen Zahlen in $[0, 1]$. Warum ist das falsch?