

Theoretische Informatik (WS 2005/2006) - Übungsblatt 8

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259
Do, 11-13 Uhr, Vasileios Anastasatos

Aufgabe 1

Zu zeigen: A entscheidbar $\Leftrightarrow A$ lexikographisch rekursiv aufzählbar.

- **A entscheidbar $\Rightarrow A$ lexikographisch rekursiv aufzählbar.**

$$A \text{ entscheidbar} \Leftrightarrow \exists \text{ TM } M: M \text{ hält } \forall x \in A \text{ mit } \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A \end{cases}.$$

- Annahme: A ist endlich. Dieser Fall ist trivial. ✓
- Annahme: A ist unendlich: Σ ist endlich, also insbesondere aufzählbar, somit o.B.d.A. auch lexikographisch aufzählbar.

Sei nun M' eine 3TM, die folgendermaßen aufgebaut ist:

Auf Band 1 stehe unär kodiert ein $n \in \mathbb{N}$

Band 2 und Band 3 seien initial leer

Programm:

simuliere

 wenn Band 2 leer,

 für alle $w \in \Sigma$ aufsteigend

 P (mit $v = \varepsilon$)

 sonst für jedes Element v von Band 2

 für alle $w \in \Sigma$ aufsteigend

 P

 kopiere Band 3 auf Band 2 (überschreibe dabei Band 2)

 lösche Band 3

bis auf weiteres

- Mit P:

 baue Wort wv

 wenn M auf wv mit 1 hält, lösche ein Element von Band 1

 schreibe wv zu allen andern auf Band 3

 wenn Band 1 leer ist, halte mit wv

M' liefert jetzt das in lexikographischer Aufzählung n -te Element, berechnet also G , G ist also berechenbar, damit ist A lexikographisch rekursiv aufzählbar.

- **A lexikographisch rekursiv aufzählbar $\Rightarrow A$ entscheidbar.**

Sei M eine TM, die G berechnet. Da es sich bei den Fällen endlicher A um Spezialfälle handelt, berechnet M o.B.d.A. auch diese. $\forall x \in A$ gilt: $\exists n \in \mathbb{N} : G(n) = x$, M berechnet also x aus der Eingabe n .

Außerdem gilt $\forall x \in A : x$ ist endlich, also $\exists$ TM M' , die für eine Eingabe $\langle x, y \rangle \in A \times A$ ausgibt, ob $x > y$ (Ausgabe 1) oder nicht (Ausgabe 0). Sie vergleicht nämlich o.B.d.A. für $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ und o.B.d.A. für $y = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$ jeweils x_1 mit y_1 usw. bis sie eine Abweichung in $i \in \mathbb{N}$

feststellt und gibt $x_i > y_i$ aus.

Sei nun M'' eine weitere TM die wie folgt aufgebaut ist:

Band 1 enthalte initial 1 in geeigneter Form

Band 2 enthalte x

Programm:

simuliere

 wenn die Ausgabe von M auf Band 1 mit Band 2 übereinstimmt,

gib "1" aus

 sonst addiere 1 zu Band 1 und schreibe das Ergebnis wieder auf Band 1

bis M' mit (M auf Band 1) und Band 2 "1" ergibt

in dem Fall halte mit "0"

M'' berechnet χ_a , die charakteristische Funktion. Somit ist A entscheidbar.

□

Aufgabe 2

Seien die Sprachen $A \subset \Sigma^*$, $B \subset \Gamma^*$ und $C \subset \Lambda^*$ gegeben. Seien weiterhin $A \preceq B$ und $B \preceq C$. Dann existieren total berechenbaren Funktionen $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ und $g : \Gamma^* \rightarrow \Lambda^*$ mit den Eigenschaften $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ und $y \in B \Leftrightarrow g(y) \in C$. Es wird nun eine Funktion h definiert, die die Verknüpfung der Funktionen f und g darstellt: $h : \Sigma^* \rightarrow \Lambda^*$; $h \mapsto f \circ g$. Sie ist (ebenfalls) total berechenbar. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehme ich an, dass die Turing-Maschine M die Funktion f und die Turing-Maschine M' die Funktion g berechnet. Die Funktion $h = f \circ g$ wird nun durch eine Turing-Maschine berechnet, die bei jeder Eingabe zuerst M simuliert, bis M in einen Haltezustand gelangen würde. Auf dem Zwischenergebnis wird jedoch durch Simulation von M' weitergearbeitet. Basierend auf den obigen Beobachtungen gilt nun folgendes:

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow \underbrace{g(f(x))}_{=h(x)} \in C$$

Somit ist A also auf C reduzierbar ($A \preceq C$) und die Relation ist transitiv. □

Aufgabe 3

(a)

Idee: nicht entscheidbar.

Sprache:

$L_a = \{w\$q\$x \in \{0,1\}^*\$ \{0,1\}^*\$ \{0,1\}^* \mid M_w \text{ erreicht Zustand } \textit{decod}(q) \text{ bei Eingabe } \textit{decod}(x)\}$

Beweis:

Sei o.B.d.A. q der einzige Endzustand der TM, weiterhin $w := \text{cod}(M)$. Genau dann, wenn M q erreicht, also x akzeptiert und auf dieser Eingabe terminiert, ist $w\$x \in UNIV$.

Somit ist das Problem genau dann entscheidbar, wenn $UNIV$ entscheidbar ist. $UNIV$ ist aber nicht entscheidbar. $\square$

(b)

Idee: entscheidbar.

Sprache:

$L_b = \{w\$x \in \{0, 1\}^* \$ \{0, 1\}^* \mid M_w \text{ macht bei Eingabe } \text{decod}(x) \text{ mind. eine Kopfbewegung nach links}\}$

Beweis:

Man betrachte o.B.d.A. eine ETM; im Fall einer k -Band TM kommt eine äquivalente ETM ohnehin nicht ohne Linksschritte aus, sofern die zu verwendeten Zellen aller Bänder konkateniert nicht ein exaktes Abbild des ETM-Bandes darstellen. Angenommen, M terminiert. In dem Fall ist das Problem entscheidbar (man simuliert einfach alle Schritte durch). Divergiert M , dann muss die Divergenz durch eine Schleife ohne gleichzeitige Abarbeitung des Bandes begründet sein, wenn nicht durch Linksschritte. Umgekehrt bedeutet das: entfernt man alle diese Schleifen, dann muss M über x terminieren, ansonsten macht sie Linksschritte. Diese Schleifen zu erkennen, ist aber trivial, indem man eine zweite TM baut, die erkennt, wenn man zu einem Zustand zurückkehrt, ohne in der Zwischenzeit den Kopf bewegt zu haben.

Bei jeder Kopfbewegung von M wird der „Trace“ gelöscht. Kommt ein Zustand, der schon im Trace steht, nochmal vor, wird der Zyklus deaktiviert. $\square$

(c)

Idee: nicht entscheidbar.

Sprache:

$L_c = \{w \mid u \in L(M_w) \forall u \in \overline{L(M')}\}$

Beweis:

Nach der Vorlesung sind Sprachen der Art $\{w \mid x \in L(M_w)\}$ nicht entscheidbar (Satz von Rice), insbesondere also nicht L . $\square$