

Theoretische Informatik (WS 2005/2006) - Übungsblatt 6

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259
Do, 11-13 Uhr, Vasileios Anastasatos

Aufgabe 1

(a)

- $S \Rightarrow_G a \underline{S} a \xRightarrow{S \rightarrow bSb}_G ab \underline{S} ba \xRightarrow{S \rightarrow aAb}_G aba \underline{A} bba \xRightarrow{A \rightarrow \varepsilon}_G ababba$
- $S \Rightarrow_G a \underline{A} b \xRightarrow{A \rightarrow bA}_G ab \underline{A} b \xRightarrow{A \rightarrow \varepsilon}_G abb$
- $S \Rightarrow_G b \underline{S} b \xRightarrow{S \rightarrow bAa}_G bb \underline{A} ab \xRightarrow{A \rightarrow \varepsilon}_G bbab$

(b)

Behauptung:

$$L(G) = \{nopqn^R | n \in \{a, b\}^*, o, q \in \{a, b\}, o \neq q, p \in \{a, b\}^*\}$$

Die beschriebene Sprache $L(G)$ ist also gerade die Sprache der Nichtpalindrome. Als Beweis sei eine Konstruktion angeführt:

Sei $n \in \Sigma$, vereinfacht sei $n^i \in \{a, b\}^i$.

- Solange man ein S im Wort hat, genügt es der Form

$$n^i S n^{iR}$$

Beweis:

- IA: $i = 0$: S ✓
- IV: $n^i S (n^i)^R$
- IB: $n^{i+1} S (n^{i+1})^R$
- IS: $n^i S (n^i)^R$
- (a) $\xrightarrow{(IV)} n^i a S a (n^i)^R = n^i a S (n^i a)^R$
- (b) $\xrightarrow{(IV)} n^i b S b (n^i)^R = n^i b S (n^i b)^R$
- $\Rightarrow n^{i+1} S (n^{i+1})^R$

- Das früheste produzierte Wort mit A genügt dann der Form $n^i o A q (n^i)^R$ mit $o, q \in \Sigma, o \neq p$. Das folgt direkt aus $S \rightarrow aAb$ und $S \rightarrow bAa$.
- A kann man zu $p \in \{a, b\}^*$ ableiten. Aus $A \rightarrow \dots$ folgt: rechtslineare Teilsprache. Beweis:

- IA: $\varepsilon \in \{a, b\}^*$ ✓
- IV: $n^i A$: Auch hier sei wieder $n^i \in \{a, b\}^i$, analog n^{i+1} .

- IB: $n^{i+1}A$
- IS: $A \rightarrow aA$ bzw. $A \rightarrow bA$.

Damit ist die Charakterisierung, die im Übrigen mit der Trivialaussage „Nicht-palindrome“ äquivalent ist (Formelverständnis), korrekt. $\square$

Aufgabe 2

Man wähle die Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$, $\Sigma = \{a, b\}$, $V = \{S, B\}$ und den Produktionen P

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSB \quad | \quad b \\ bB &\rightarrow Bbb \\ aB &\rightarrow a \end{aligned}$$

Beweis, dass $L(G) = L$:

1. – IV: $b^i B \rightarrow Bb^{2^i}$
 - IB: $b^{i+1} B \rightarrow Bb^{2(i+1)}$
 - IA: $b^1 B = bB \rightarrow Bbb = Bb^2 = Bb^{2 \cdot 1} \quad \checkmark$
 - IS: $b^{i+1} B = b^i bB \rightarrow b^i Bbb = b^i Bb^2 \xrightarrow{(IV)} Bb^{2^i} b^2 = Bb^{2(i+1)}$
2. – IV: $S \in L$
 - IB: $aSB \in L$
 - IA: $b \in L \quad \checkmark$, da $S \rightarrow b$
 - IS: $aSB = aa^i a^{2^i} B = a^{i+1} b^{2^i} B \xrightarrow{1.} a^{i+1} Bb^{2(2^i)} = a^i \underline{aB} b^{2^{i+1}} \rightarrow a^i ab^{2^{i+1}} \rightarrow a^{i+1} b^{2^{i+1}} \in L$

□

Aufgabe 3

(a)

Man kann direkt aus der Grammatik G einen Automaten M_G konstruieren, indem man folgende Regeln anwendet:

Existiert ein Zustand bei Nennung noch nicht, so ist er einzuführen. Die in den Schemata verwendeten Variablen sind auch bei Zustandsbezeichnern durch den jeweils konkreten Bezeichner zu ersetzen. Gleiches gilt für Zeichen des Alphabets.

1. $A \rightarrow Ba$: Man führe eine Kante von Zustand A auf Zustand B mit Zeichen a ein.

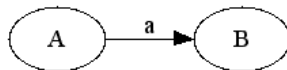


Abbildung 1: Aufgabe 3 (a): 1.

2. $A \rightarrow Aa$: Sonderfall von 1.: Hierbei beschreibt die einzuführende Kante eine Schleife (von Zustand A auf Zustand A mit Zeichen a).

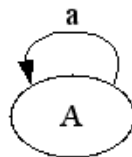


Abbildung 2: Aufgabe 3 (a): 2.

3. $A \rightarrow \varepsilon$: Man wandle A in den Startzustand um.



Abbildung 3: Aufgabe 3 (a): 3.

4. $A \rightarrow a$: Man führe einen unbenannten Startknoten mit a -Kante auf A ein.

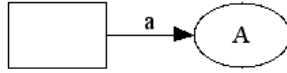


Abbildung 4: Aufgabe 3 (a): 4.

5. S ist Startsymbol: S sei ein Endzustand.

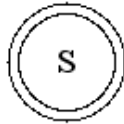


Abbildung 5: Aufgabe 3 (a): 5.

Auf einen Beweis soll hier verzichtet werden. Die Umformungen für die drei unteren Fälle kann man direkt beweisen, wogegen sich bei den oberen beiden strukturelle Induktion mit z.B. dem zweiuntersten Fall als Anfang anbietet. Somit ist $L(G) = L(M_G)$ und da M_G ein EA und damit $L(G)$ regulär.

(b)

Man überlegt sich, dass man die rechte Seite der Ableitungen auch „rückwärts“ streichen kann, also Regeln der Form

$$A \rightarrow Ba \quad \text{als} \quad A \rightarrow aB$$

schreibt. Somit produziert man gerade das umgekehrte Wort zu jedem Wort der Sprache L . Diese Sprache L' ist aber rechtslinear (was man sofort aus der Grammatik ablesen kann (Chomsky)). Nach der Vorlesung ist für L' regulär auch L'^R regulär. Da aber $L' = \{w|w^R \in L\}$ ist $L'^R = L$. Somit muss auch L regulär sein.