

Theoretische Informatik (WS 2005/2006) - Übungsblatt 2

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259
Do, 11-13 Uhr, Vasileios Anastasatos

Aufgabe 1

$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \exists$ Surjektion von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Fasse jede Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ als unbeschränkten Bitstring b auf.

Betrachte Funktion $g(x)$ mit

$$g : x \mapsto \begin{cases} \# \text{ Nullen zwischen } x\text{-ten und } (x+1)\text{-ten Eins} & \text{falls } \# \text{ Nullen endlich} \\ \# \text{ Einsen zwischen } x\text{-ten und } (x+1)\text{-ten Null} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x = 0$ sei $g(x) = g(0)$ zu verstehen als

$$g : 0 \mapsto \begin{cases} \# \text{ Nullen vor 1. Eins} & \text{falls } \# \text{ Nullen endlich} \\ \# \text{ Einsen vor 1. Null} & \text{sonst} \end{cases}$$

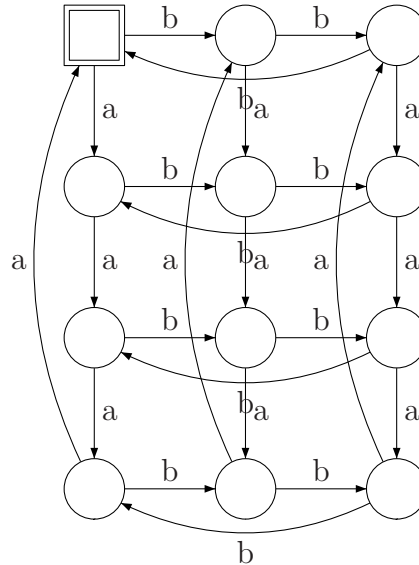
$\Rightarrow \exists$ Surjektion von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ und $\exists$ Surjektion von $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

$\Rightarrow |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$.

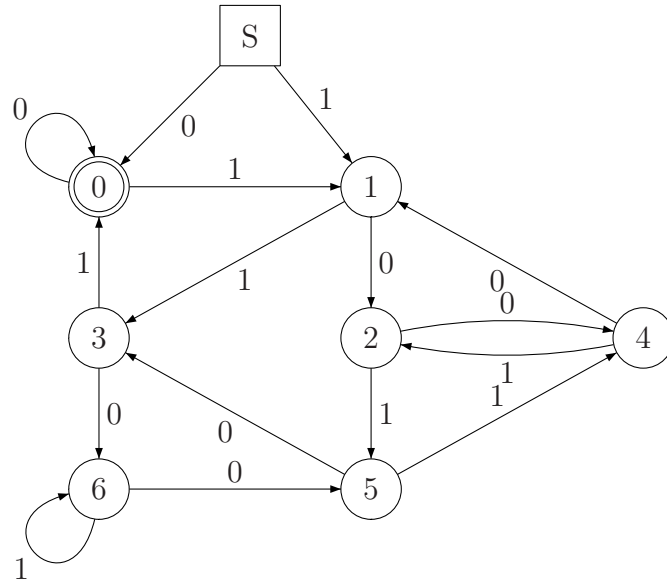
□

Aufgabe 2

(a)



(b)



(c)

Sei S die Menge der Quadratzahlen. Sei $S' \subset S$ mit der Form $1^n 0^n 01, n \in \mathbb{N}$, also

$$S' = \{w \mid w = 2^{2a} - 2^{2a+1} + 1\} \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

(Es gilt $2^{2a} - 2^{2a+1} + 1 = (2^a - 1)^2 \in S \quad \forall a \in \mathbb{N}$).

Ist $a = 1, b = 0$ so hat man also mit $v \in S'$ Worte der Form $v = a^n b^n 01$. Für Worte dieser Form gibt es jedoch keine DEA-Sprache, da in der Vorlesung gezeigt wurde, dass $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ keine DEA-Sprache ist.

Die einzige Möglichkeit, Worte der Form $1^n 0^n 01$ zu akzeptieren wäre, die "0"-en in einer Schleife zu überlesen, sie also zu ignorieren. Solche Worte wären dann aber auch z.B. $1^m 1^n 01$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ und $m \neq n$. Sie sind aber in der Regel keine Quadratzahlen:

$\exists v \in \{1^m 1^n 01\}$ mit $v \notin S$, z.B. $m = 4, n = 3$:

$$\langle 111100001 \rangle = 2^9 - 2^5 + 1 = 512 - 32 + 1 = 481 \notin S$$

Somit hat 1^n für jedes n eine Fortsetzungssprache, die sich von denen der Worte $1^{n'}$ mit $n' \neq n$ unterscheidet. Da aber $n \in \mathbb{N}$, somit $\{w | w = 1^n 0^n 01, n \in \mathbb{N}\}$ unendlich (mindestens eine pro Wort der Teilmenge S'), somit ist $\mathcal{F}$ endlich.
 $\Rightarrow \nexists$ DEA. □

(d)

Man kann hier keinen DEA konstruieren. Denn:

Seien $a, b \in \mathbb{N}$, a prim, $b < a$. Dann lässt sich sicher sagen, dass $ggT(a, b) = 1$.

Außerdem ist 2^n teilerfremd a , $\forall a > 2, n \in \mathbb{N}$.

Aus diesen Eigenschaften folgt $ggT(a, b \cdot 2^{|a|}) = 1$, was eine Primfaktorzerlegung einfach zeigt. $|a|$ sei hierbei die Länge des Binärwortes a .

Nach dem Satz von Dirichlet ist jetzt aber

$$\exists x \quad c := a + x \cdot (b \cdot 2^{|a|})$$

prim, wobei das $x \in \mathbb{N}$ eine bestimmte Zahl ist, für die das gilt.

Wenn man das rückwärts gelesene Wort betrachtet, hat jedes $a \in \{p | p \text{ ist prim}\}$ mindestens eine Fortsetzungssprache, die von seiner jeweiligen Länge als Binärwert abhängt.

Da es aber unendlich viele Primzahlen und damit auch beliebig lange Bitstring-Darstellungen solcher Zahlen gibt, muss die Menge aller Fortsetzungssprachen $\mathcal{F}$ unendlich sein.

$\Rightarrow \nexists$ DEA, der das akzeptiert.

Aufgabe 3

- $\bar{L}$:

Sei M der Automat, der L akzeptiert. Es existiert ein Automat $M' = (\Sigma, Q', s', F', \Delta')$, der $\bar{L}$ akzeptiert. M' sieht wie M aus mit folgenden Unterschieden:

- alle Endzustände von M sind in M' keine Endzustände und alle nicht-Endzustände von M sind in M' Endzustände.
- M' besitzt noch einen weiteren Endzustand, in den der Automat M' für ein eingelesenes Zeichen übergeht, d.h.

$$\Delta' = \{(q, a, \beta) | (q, a, q') \notin \Delta \text{ für } q, q' \in Q, a \in \Sigma\}$$

- $L \cap L'$:

$L \cap L' \Rightarrow$ Es existieren Automaten M , der L akzeptiert, und M' , der L' akzeptiert. Nach dem Satz von Myhill-Nerode gilt:

$L \subset \Sigma^*$ DEA-Sprache $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ endlich.

$\Rightarrow \mathcal{F}_L \cap \mathcal{F}_{L'}$ endlich

$\Rightarrow L \cap L'$ DEA-Sprache.

- $L \cup L'$:

analog zu $L \cap L'$: $\mathcal{F}_L \cap \mathcal{F}_{L'}$ endlich $\Rightarrow L \cup L'$ DEA-Sprache.