

Theoretische Informatik (WS 2005/2006) - Übungsblatt 11

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259
Do, 11-13 Uhr, Vasileios Anastasatos

Aufgabe 1

(a)

Wir definieren f und g wie folgt:

$$f(n) = \begin{cases} n^3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} n^3 & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ n^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Behauptung: $f \notin \mathcal{O}(g)$

Beweis:

Angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ mit der Eigenschaft, dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann setzen wir n' auf eine ungerade Zahl größer als c , die keine Primzahl ist und erhalten $f(n') = n'^3 > c \cdot n'^2 = c \cdot g(n')$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

- Behauptung: $g \notin \mathcal{O}(f)$

Beweis:

Angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ mit der Eigenschaft, dass $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$. Dann setzen wir n' auf eine gerade Zahl größer als c und erhalten $g(n') = n'^2 > c \cdot n = c \cdot f(n)$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

(b)

Definiere die Funktionen

$$gerade(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $ungerade(n)$ analog.

Betrachte die Funktionen $f(n) = n^{n+gerade(n)}$ und $g(n) = n^{n+ungerade(n)}$. Es gilt offensichtlich $f(n) \neq g(n)$ für $n \geq 2$ und $f(n), g(n) \in \{n^n, n^{n+1}\}$. Genauer gesagt: Für $n \geq 2$ und n gerade, ist $f(n) = n \cdot g(n)$ und für n ungerade ist $g(n) = n \cdot f(n)$. Beide Funktionen sind streng monoton steigend.

Dies wird für $f(n)$ gezeigt. Es ist

$$\begin{aligned}
 f(n+1) &= (n+1)^{n+1+gerade(n+1)} \\
 &\geq (n+1)^{n+1} \\
 &= (n+1)^n \cdot (n+1)^1 \\
 &> n^n \cdot n^1 \\
 &> n^n \cdot n^{gerade(n)} \\
 &= f(n)
 \end{aligned}$$

Es gilt $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$. Die erste Aussage wird gezeigt; die zweite folgt analog.

Zu zeigen ist: $\forall c > 0 : \forall n_0 : \exists n \geq n_0 : f(n) > c \cdot g(n)$. Bei gegebenen c und n_0 wählt man n als gerade Zahl größer als $\max\{2, c, n_0\}$. Dann gilt $f(n) = n \cdot g(n) > c \cdot g(n)$.

Aufgabe 2

Sei $g(n) = b^{f(n)}$, wobei b eine Konstante, die abhängig von L ist. Dann erfüllt g die geforderten Eigenschaften.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 L \in \text{NTIME}(f(n)) &\xRightarrow{\text{Lemma B (ii)}} L \in \text{DTIME}(b^{f(n)}) \\
 &\xRightarrow{\text{Lemma D (i)}} \overline{L} \in \text{DTIME}(b^{f(n)}) \\
 &\xRightarrow{\text{Lemma B (i)}} \overline{L} \in \text{NTIME}(b^{f(n)})
 \end{aligned}$$