

Theoretische Informatik (WS 2005/2006) - Übungsblatt 10

Jan Hendrik Dithmar - Matrikelnummer 2031259
Do, 11-13 Uhr, Vasileios Anastasatos

Aufgabe 1

Es gilt: $L_X \cap L_Y \neq \emptyset$ genau dann wenn

$$I = J \wedge J = K \wedge K = H \text{ und somit auch } H = I$$

Außerdem muss gelten:

$$X[I] = Y[H] = Y[I]$$

Es folgt: Worte aus $L_X \cap L_Y$ haben folgende Form:

$$\{I^R \# I \$ I^R \# X[I] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+\}$$

Da $X[I^n] = Y[I^n] \forall n \geq 1$ (wegen PCP) wenn $X[I] = Y[I]$ gilt folgt

$$L_X \cap L_Y = \{I^{R^n} \# I^n \$ I^{R^k} \# X[I^n] \mid I \in \{1, \dots, k\}^+\} \text{ mit } n \geq 1$$

Es bleibt zu zeigen, dass $L_X \cap L_Y$ nicht kontextfrei ist.

Beweis mit dem Pumping Lemma:

1. Gegner gibt ein $N \in \mathbb{N}$ vor.
2. Ich wähle $z \in L_X \cap L_Y$ mit $|z| \geq N$:

$$z = I^{R^N} \# I^N \$ I^{R^N} \# X[I^N]$$

3. Gegner gibt eine Unterteilung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq N$ und $|vx| > 0$ vor.
4. Ich wähle $i = 0$: $uwv \notin L_X \cap L_Y$ da

1. Fall: vx enthält ein $\#$ oder $\$$: uwv kann nicht mehr aus $L_X \cap L_Y$ sein, da $\#$ oder $\$$ fehlt.

2. Fall: vx enthält weder $\#$ noch $\$$: uwv kann nur ein Teilstring von $\underbrace{I^{R^N}}_{=:a^R}$, $\underbrace{I^N}_{=:a}$ oder $\underbrace{X[I^N]}_b$ sein. Durch Wegfallen von vx wird die Länge von a^R , a oder b in uwv verkürzt, somit ist $uwv \notin L_X \cap L_Y$.

Für ein Wort $a^R \# a \$ a^R \# b \in L_X \cap L_Y$ muss gelten $|a^R| = |a| = |b|$.

Aufgabe 2

Betrachte folgende Sprache:

$$L_P = \{I\#X[I]^R\$Y[I]\#J^R \mid I, J \in \{1, \dots, k\}^+\}$$

wobei k, X, Y eine Instanz des PCP. Eine kontextfreie Grammatik für L_P ist:

$$G_P = (\Sigma \cup \{\$, \#\} \cup \{1, \dots, k\}, \{S, L, R\}, S, P)$$

mit Produktionen

$$S \rightarrow L\$R$$

$$L \rightarrow iL(x_i)^R$$

$$L \rightarrow i\#(x_i)^R$$

$$R \rightarrow (y_i)Rj$$

$$R \rightarrow (y_i)\#j$$

wobei $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq k$.

Gibt es ein Palindrom in L_P , so gilt $X[I] = Y[I]$ und $I = J$. Dann hat PCP eine Lösung für diese Instanz. Gibt es kein Palindrom in L_P , so hat auch PCP keine Lösung für diese Instanz.

Insgesamt folgt:

Es ist nicht entscheidbar, ob eine gegebene kontextfreie Grammatik eine Sprache generiert, die ein Palindrom positiver Länge enthält, sonst wäre L_P und somit PCP entscheidbar.

Aufgabe 3

Seien $f, g \in \text{FÜP}$.

Behauptung:

$$f \notin \mathcal{O}(g) \not\Rightarrow f \in \omega(g)$$

Beweis durch Gegenbeispiel:

Wähle

$$f(n) = (1 + (-1)^n)n + 1$$

$$g(n) = 1$$

$$\mathcal{O}(g) = \{f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : f \leq_{f\ddot{u}} c \cdot g\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{O}(g) = \{f \in \text{FÜP} \mid \exists c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

$$\Rightarrow \neg \mathcal{O}(g) = \{f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : f(n) > c \cdot g(n)\}$$

$$\omega(g) = \{f \in \text{FÜP} \mid \forall c > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Es gilt also $f \notin \mathcal{O}(g)$, oder anders geschrieben $f \in (\neg \mathcal{O}(g))$.

$$f(n) > c \cdot g(n)$$

$$\Leftrightarrow (1 + (-1)^n)n + 1 > c \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 1 > c & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 > c & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Es gilt jetzt: $\forall c > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0 : 2n + 1 > c$.

Wähle für n immer eine gerade Zahl mit $n \geq n_0, n > \frac{c-1}{2}$.

Es gilt $f \notin \omega(g)$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

$$\Leftrightarrow (1 + (-1)^n)n + 1 \geq c \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n + 1 \geq c & \text{falls } n \text{ gerade (1)} \\ 1 \geq c & \text{falls } n \text{ ungerade (2)} \end{cases}$$

(1) stimmt: $\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : 2n + 1 \geq c$. Wähle $n_0 \geq \frac{c-1}{2}$.

(2) stimmt nicht für alle $c > 0$ bzw. $n \geq n_0$.