1. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

   (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, $g: \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ primitiv rekursive Funktionen. Dann ist auch $f: \mathbb{N}^{m+n} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv, wenn es definiert ist durch

   $$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = g(x_1, \ldots, x_j, h(y_1, \ldots, y_m), x_{j+1}, \ldots, x_n).$$

   (b) Für $k \geq 1$ ist die Funktion $+_k: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $+_k(n_1, \ldots, n_k) = \sum_{1 \leq i \leq k} n_i$ primitiv rekursiv.

   (c) Sei $g: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitiv rekursiv. Dann ist $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ auch primitiv rekursiv, wenn es definiert ist als $f(\overline{n}, m) = \sum_{0 \leq i \leq m} g(\overline{n}, i)$.

2. Die *Ackermann Funktion* $A: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist eine 2-stellige Funktion, die folgendermaßen rekursiv definiert wird:

   $$\begin{array}{lcll} A(i,0) & = & 1 & \text{für alle } i \in \mathbb{N} \\ A(0,1) & = & 2 & \\ A(0,x) & = & x+2 & \text{für } x \geq 2 \\ A(i,x) & = & A(i-1, A(i, x-1)) & \text{für } i > 0 \text{ und } x > 0 \end{array}$$

   Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, daß diese Funktion nicht primitiv rekursiv ist, obwohl sie offenbar überall definiert und berechenbar ist.

   Zuerst ein paar Übungen zum Aufwärmen:

   (a) Was ist $A(i, 0)$ als Funktion von i, was ist $A(i, 1)$, was ist $A(i, 2)$?

   (b) Was ist $A(1, x)$ als Funktion von x, was ist $A(2, x)$, was ist $A(3, x)$ (oder gar $A(4, x)$)?

   (c) Zeigen Sie, daß A in beiden Argumenten monoton wachsend ist.

   (d) Zeigen Sie, daß für $i \geq 0$ und $x \geq 3$ gilt, daß $A(i, x+1) \leq A(i+1, x)$.

   (e) Zeigen Sie, daß für $i \geq 0$ und $x \geq 3$ gilt, daß $A(i, 2x) \leq A(i+2, x)$.

   (f) Schließlich zeigen Sie, daß es für jede natürliche Zahl $c > 0$ ein $d \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für $i \geq 0$ und $x \geq 3$ gilt, daß $A(i, cx) \leq A(i+d, x)$.

   Nach diesen Aufwärmübungen (von denen (d) und (e) am kniffligsten sind) nun zum eigentlichen Inhalt dieser Aufgabe. Im Prinzip sollen Sie zeigen, daß die Ackermann Funktion viel zu schnell wächst, als daß sie als primitiv rekursive Funktion dargestellt werden könnte.

   (g) Sei $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine primitiv rekursive Rekursion. Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, daß es eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ gilt, daß

   $$h(x_1, \ldots, x_k) \leq A(d, 3 + x_1 + \cdots + x_k).$$

   (h) Zeigen Sie weiters, daß es eine Zahl $c \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

   $$h(x_1, \ldots, x_k) \leq A(c, \max\{x_1, \ldots, x_k\})$$

   gilt für genügend große x_i, und begründen Sie, warum deswegen die Ackermann Funktion A nicht primitiv rekursiv sein kann.

Abgabeort ist das Postfach Lehrstuhl Seidel im Erdgeschoß Gebäude 36.