



1. (10 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Begriff der *Reduktion* definiert. Zur Erinnerung, man sagt, eine Sprache $A \subset \Sigma^*$ *reduziert sich auf* eine Sprache $B \subset \Gamma^*$, in Zeichen $A \preceq B$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Es sei nun $\mathcal{RE}$ die Menge aller Turing akzeptierbaren Sprachen über dem Alphabet Σ mit $|\Sigma| \geq 2$. Eine Sprache $X \subset \Sigma^*$ heißt *$\mathcal{RE}$ -schwer*, wenn für jede Sprache $A \in \mathcal{RE}$ gilt, $A \preceq X$. Die Sprache X heißt *$\mathcal{RE}$ -vollständig*, wenn sie *$\mathcal{RE}$ -schwer* ist und $X \in \mathcal{RE}$ gilt.

Zeigen Sie, dass es eine *$\mathcal{RE}$ -vollständige* Sprache gibt. Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. (10 Punkte)

Wir haben gezeigt, dass die Sprache $\text{UNIV} = \{w\$x \mid x \in L(M_w)\}$ unentscheidbar ist. Betrachten wir nun die Sprachen, die entstehen, wenn man entweder die zu betrachtende Maschine oder das Eingabewort fixiert:

$$\begin{aligned}\text{UNIV}_w &= \{ \langle x \rangle \mid x \in L(M_w) \} \\ \text{UNIV}_{\langle x \rangle} &= \{ w \mid x \in L(M_w) \}\end{aligned}$$

Was kann man dann über die Entscheidbarkeit dieser Sprachen aussagen? Gibt es Maschinen M_v und M_w , so dass UNIV_v entscheidbar und UNIV_w unentscheidbar ist? Gibt es Worte x und y , sodass $\text{UNIV}_{\langle x \rangle}$ entscheidbar und $\text{UNIV}_{\langle y \rangle}$ unentscheidbar ist?

3. (10 Punkte)

Sei $J = \{w \mid w = 0x \text{ für ein } x \in \text{UNIV} \text{ oder } w = 1y \text{ für ein } y \in \overline{\text{UNIV}}\}$. Zeigen Sie, dass weder J noch das Komplement $\overline{J}$ Turing-akzeptierbar ist.

4. (10 Punkte)

Eine *BB-Turingmaschine* (BB-TM) ist eine 2-Band Turingmaschine, die zusätzlich eine *Black Box* zur Verfügung hat, um die ansonsten Turing unentscheidbare Sprache UNIV zu entscheiden.

Auf dem ersten Band arbeitet eine solche BB-TM wie eine gewöhnliche Turingmaschine; auf dem zweiten Band kann sie Eingaben für eine Black Box Anfrage erzeugen. Um eine solche Anfrage ausführen zu können besitzt die BB-TM drei ausgezeichnete Zustände $q_?$, q_{ja} und q_{nein} .

Gelangt eine BB-TM während einer Berechnung in den Zustand $q_?$ und steht zu diesem Zeitpunkt das Wort $w\$x$ auf dem zweiten Arbeitsband, so wechselt sie in den Zustand q_{ja} , falls $w\$x \in \text{UNIV}$ bzw. in den Zustand q_{nein} , wenn $w\$x \notin \text{UNIV}$. Diese Entscheidung wird mit Hilfe der Black Box getroffen. Entspricht der Inhalt des zweiten Bandes nicht einer gültigen Kodierung der Form $w\$x$, so wechselt die Maschine ebenfalls in den Zustand q_{nein} .

(a) Geben Sie an, wie die Sprache $\overline{\text{UNIV}}$ von einer BB-TM akzeptiert werden kann.

(b) Ist *jede* Sprache von einer BB-TM akzeptierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{1\}$ *entscheidbar* ist.