



1. (15 Punkte)

Eine einfache Registermaschine mit *indirekter Adressierung* hat eine unbegrenzte Anzahl von Registern $x[i]$ für $i \in \mathbb{N}$, in denen ebenfalls natürliche Zahlen gespeichert werden können. Alle Register, außer denjenigen, in denen die Eingabe gespeichert wird, sind zu Beginn einer Berechnung mit Null initialisiert.

Hier sind die Befehle von der Form

$$\text{incr}(x[i]) \quad \text{oder} \quad \text{decr}(x[i])$$

sowie

$$\text{incr}(x[x[i]]) \quad \text{oder} \quad \text{decr}(x[x[i]]).$$

Solche Maschinen können den Inhalt der Register also lediglich inkrementieren bzw. dekrementieren, und die Nummern der Register dürfen entweder direkt als Konstanten angegeben werden oder wiederum in einem Register gespeichert sein. Ist z. B. in Register 47 die Zahl 11 gespeichert und in Register 11 die Zahl 4811, so wird durch den Befehl $\text{incr}(x[x[47]])$ der Inhalt von Register 11 zu 4812 verändert.

Zusätzlich erlauben auch diese Maschinen einen Vergleich der Registerinhalte mit Null, wobei die Adressen wieder direkt oder indirekt angegeben werden können.

Zeigen Sie: Jede Registermaschine mit indirekter Adressierung kann von einer gewöhnlichen k -Registermaschine schrittweise simuliert werden. Dabei ist k eine für *alle* Registermaschinenprogramme gültige Konstante.

2. (15 Punkte)

Welche der folgenden Probleme sind Turing entscheidbar und welche nicht? Formulieren Sie sie jeweils als Sprachen und machen sie dann Aussagen über deren Entscheidbarkeit.

- (a) Gegeben seien eine TM M , ein Zustand q von M und ein String w . Erreicht M auf Eingabe w vom Startzustand aus irgendwann den Zustand q ?
- (b) Gegeben seien eine TM M und ein Wort w . Wenn M mit Eingabe w beginnt, rückt sie je ihren Kopf nach links?
- (c) Gegeben seien zwei Turing Maschinen M und M' . Gilt $L(M) = \overline{L(M')}$?

3. (5 Punkte)

In der Vorlesung haben wir eine *universelle Turingmaschine* kennen gelernt, die jede andere Turingmaschine durch Eingabe der jeweiligen Kodierung simulieren kann.

Gibt es auch einen *universellen endlichen Automaten*? Das heißt, gibt es einen endlichen Automaten U , der nur Strings der Form $w\$x$ akzeptiert, wobei w die Kodierung eines deterministischen endlichen Automaten M_w darstellt und $x = \langle u \rangle$ mit $u \in L(M_w)$?

Wenn ja, skizzieren Sie so einen universellen Automaten, wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

4. (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde der Begriff der *Reduktion* definiert. Zur Erinnerung, man sagt, Sprache $A \subset \Sigma^*$ *reduziert sich auf* Sprache $B \subset \Gamma^*$, in Zeichen $A \preceq B$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ gibt, sodass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Ist die Relation $\preceq$ transitiv? D.h., folgt aus $A \preceq B$ und $B \preceq C$ auch $A \preceq C$?