



1. (10 Punkte) Sei

$$p(n) = \sum_{i=0}^d a_i n^i$$

ein Polynom in n vom Grad d und seien $a_d > 0$ und k Konstanten. Benutzen Sie die Definitionen der asymptotischen Notation um die folgenden Aussagen zu beweisen.

- (a) Aus $k \geq d$ folgt $p(n) = O(n^k)$.
 - (b) Aus $k \leq d$ folgt $p(n) = \Omega(n^k)$.
 - (c) Aus $k = d$ folgt $p(n) = \Theta(n^k)$.
 - (d) Aus $k > d$ folgt $p(n) = o(n^k)$.
 - (e) Aus $k < d$ folgt $p(n) = \omega(n^k)$.
2. (10 Punkte) Ordnen Sie die folgenden Funktionen asymptotisch bezüglich der O -Notation und begründen Sie Ihre Anordnung.

$$n\sqrt{\log n} \quad n \quad n2^{\sqrt{\log n}} \quad n2^{3\sqrt{\log n}} \quad n \log n \quad n^2 \quad \sqrt{n} \log n \quad 1 + \sin n \quad n \log \log n \quad n^{\log n}$$

3. (10 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussage: Wird eine Sprache L von einer k -bändigen Turingmaschine M_1 mit worst-case-Laufzeit $T(n)$ erkannt, so wird L auch von einer k -bändigen Turingmaschine M_2 mit worst-case-Laufzeit $c \cdot T(n) + 2 \cdot n$ für jedes $c > 0$ erkannt. Dabei nehmen wir an, dass $k \geq 2$ ist.
4. (10 Punkte) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ *passend*, falls f nicht fallend ist (d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(n+1) \geq f(n)$) und die folgende Eigenschaft besitzt: Zu f existiert eine k -Band Turingmaschine M_f bestehend aus einem Eingabeband, dessen Inhalt nicht verändert wird, aus $(k-2)$ Arbeitsbändern und einem Ausgabeband. Bei Eingabe eines Wortes w markiert die Turingmaschine M_f genau $f(|w|)$ Zellen des Ausgabebandes und belässt w auf dem Eingabeband. Dafür benötigt sie $O(|w| + f(|w|))$ Rechenschritte und $O(f(|w|))$ Platz auf jedem Nichteingabeband.
- (a) Es seien nun $f(n)$ und $g(n)$ passende Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $f+g$, $f \cdot g$ und 2^g passende Funktionen sind.
 - (b) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen passend sind (mit $\text{Log } n = \lceil \log_2(n+1) \rceil$):

$$\text{Log}^2 n \quad n \text{Log } n \quad n^2 \quad n^3 + 3n \quad 2^n \quad 2^{n^2} \quad \lceil \sqrt{n} \rceil \quad n!$$