1. (12 Punkte) Bekanntlich werden $\mathcal{P}$ und $\mathcal{NP}$ als unendliche Vereinigungen von Komplexitätsklassen definiert:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME(n^k) \quad \text{and} \quad \mathcal{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(n^k)$$

Es ist nun vorstellbar, dass $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gilt und dass dies aber "in der Praxis" vollkommen nutzlos ist, da für manche Sprachen die deterministische und die nicht-deterministische Erkennungszeit "zu unterschiedlich" sind. Es wäre z.B. möglich, dass es für jedes $k > 0$ eine Sprache gibt, die zwar in $NTIME(n^k)$ liegt, aber bestenfalls in $DTIME(n^{10^k})$. Es gäbe dann also z.B. eine Sprache, die man nicht-deterministisch in $O(n^2)$ Zeit erkennen kann und für deren deterministische Erkennung man mindestens $\Omega(n^{100})$ Zeit bräuchte.

Zeigen Sie, dass diese Konstellation, $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ und nicht-deterministische und deterministische Erkennungszeit sind zu unterschiedlich, nicht eintreten kann.

Genauer, zeigen Sie, wenn für irgendeine Funktion $c(k) \in \omega(k)$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $NTIME(n^k) \not\subseteq DTIME(n^{c(k)})$, dann folgt daraus $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

2. (8 Punkte) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$. Ein *Hamiltonscher Pfad* in G ist eine Auflistung $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aller Knoten in V, sodass $[v_i, v_{i+1}\rangle \in E$ für $i = 1, \ldots, n-1$. Ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist ein Hamiltonscher Pfad mit der zusätzlichen Eigenschaft $[v_n, v_1\rangle \in E$.

Es sei *HaPf* das Problem zu entscheiden, ob ein vorgegebener gerichteter Graph einen Hamiltonschen Pfad besitzt, und analog *HaKr* das Problem, ob ein Graph einen Hamiltonschen Kreis besitzt.

Zeigen Sie, dass diese beiden Probleme in polynomialer Zeit ineinander transformierbar sind.

3. (6 Punkte) Das Problem *Teilgraph–Isomorphismus* ist wie folgt definiert: Gegeben sind zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$. Gefragt ist, ob G_1 isomorph zu einem Teilgraphen von G_2 ist, d.h. ob es einen Graphen $G_2' = (V_2', E_2')$ mit $V_2' \subseteq V_2$ und $E_2' \subseteq E_2$ und eine bijektive Abbildung $\pi : V_1 \to V_2'$ gibt mit $(u, v) \in E_1$ genau dann, wenn $(\pi(u), \pi(v)) \in E_2'$. Zeigen Sie, dass das Teilgraph–Isomorphismus Problem NP-vollständig ist.

4. (6 Punkte) Wir betrachten das folgende Problem: Gegeben ist ein Tunnelsystem bestehend aus Tunnelstücken und Kreuzungen, in denen sich beliebig viele Tunnelstücke treffen können.

Nun soll *jedes* Tunnelstück belüftet werden. Ein Tunnelstück ist belüftet, wenn an einem seiner beiden Enden (das ist entweder eine Kreuzung oder der Endpunkt des Tunnelstücks) eine Entlüftungsanlage installiert ist. Die Anzahl der Enlüftungsanlagen soll dabei minimal sein.

   (a) Geben Sie eine mathematische Formulierung dieses Problems an.
   (b) Zeigen Sie, dass dieses Problem NP-vollständig ist.