1. (6 Punkte) Sei
$$p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$$
ein Polynom in n vom Grad d und seien $a_d > 0$ und k Konstanten. Benutzen Sie die Definitionen der asymptotischen Notation um die folgenden Aussagen zu beweisen.
   (a) Aus $k \geq d$ folgt $p(n) \in O(n^k)$.
   (b) Aus $k \leq d$ folgt $p(n) \in \Omega(n^k)$.
   (c) Aus $k = d$ folgt $p(n) \in \Theta(n^k)$.

2. (14 Punkte) Seien $f(n)$ und $g(n)$ fast überall positive Funktionen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen, wobei eine infix–Operation $\circ$ auf natürliche Weise auf Mengen ausgedehnt wird:
$$\begin{aligned} A \circ B &= \{a \circ b \mid a \in A, b \in B\} \\ a \circ B &= \{a \circ b \mid b \in B\}. \end{aligned}$$
   (a) $f(n) + g(n) \in \Theta(\min(f(n), g(n)))$
   (b) $f(n) + o(f(n)) \subseteq \Theta(f(n))$
   (c) $O(f(n)) \cdot O(g(n)) \subseteq O(f(n) \cdot g(n))$
   (d) $c \cdot O(f(n)) = O(f(n))$
   (e) Aus $f(n) \in O(g(n))$ folgt $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$
   (f) Aus $f(n) \in O(g(n))$ folgt $g(n) \in \Omega(f(n))$
   (g) $f(n) \in \Theta(f(n/2))$

3. (15 Punkte) Bestimmen Sie für jedes Paar (A, B) in der folgenden Tabelle, ob $A = O(B)$, $A = o(B)$, $A = \Omega(B)$, $A = \omega(B)$ oder $A = \Theta(B)$ ist. Dabei seien $k \geq 1$, $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ Konstanten. Ihre Antwort sollte ebenfalls in Tabellenform sein, bei der die einzelnen Kästchen mit “ja” oder “nein” beschriftet sind.

A	B	O	o	Ω	ω	Θ
$\log^k n$	n^ε					
n^k	c^n					
$\sqrt{n}$	$n^{\sin n}$					
2^n	$2^{n/2}$					
$n^{\log m}$	$m^{\log n}$					
$\log(n!)$	$\log(n^n)$					

4. (20 Punkte) Beweisen Sie folgende Aussage: Wird eine Sprache L von einer k-bändigen Turingmaschine M_1 mit worst–case–Laufzeit $T(n)$ erkannt, so wird L auch von einer k-bändigen Turingmaschine M_2 mit worst–case–Laufzeit $c \cdot T(n) + 2 \cdot n$ für jedes $c > 0$ erkannt. Dabei nehmen wir an, dass $k \geq 2$ ist.