1. (10 Punkte) Für eine Zahl c definieren wir c-PCP, das *Postsche Korrespondenzproblem mit höchstens c Wortpaaren*, als die Sprache bestehend aus denjenigen Folgen von höchstens c Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ (also $k \leq c$), für die es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_n$ gibt, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$.

   Gibt es eine Zahl c, sodass c-PCP nicht entscheidbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

2. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{1\}$ *entscheidbar* ist.

3. (10 Punkte) Sei $J = \{w \mid w = 0x \text{ für ein } x \in \texttt{HALTE} \text{ oder } w = 1y \text{ für ein } y \in \overline{\texttt{HALTE}}\}$. Zeigen Sie, dass weder J noch das Komplement $\overline{J}$ Turing–akzeptierbar ist.

4. (10 Punkte) Wir haben gezeigt, dass die Sprache $\texttt{HALTE} = \{\langle M\rangle\$w \mid w \in L(M)\}$ unentscheidbar ist. Betrachten wir nun die Sprachen, die entstehen, wenn man entweder die zu betrachtende Maschine oder das Eingabewort fixiert:

$$\begin{aligned} \texttt{HALTE}_M &= \{\, w \mid w \in L(M) \,\} \\ \texttt{HALTE}_w &= \{\, \langle M\rangle \mid w \in L(M) \,\} \end{aligned}$$

   Was kann man dann über die Entscheidbarkeit dieser Sprachen aussagen? Gibt es Maschinen M und M', sodass $\texttt{HALTE}_M$ entscheidbar und $\texttt{HALTE}_{M'}$ unentscheidbar ist? Gibt es Worte w und w', sodass $\texttt{HALTE}_w$ entscheidbar und $\texttt{HALTE}_{w'}$ unentscheidbar ist?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

5. (10 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antworten.

   (a) $n^2 \log n = O(n^3)$
   (b) $n^3 = O(n^2 \log n)$
   (c) $2^{n+1} = O(2^n)$
   (d) $(n+1)! = O(n!)$
   (e) Für jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ mit $f(n) = O(n)$ gilt auch $[f(n)]^2 = O(n^2)$.

6. (10 Punkte) Beweisen Sie, dass für alle $k > 0$ gilt:

$$(\log n)^k = O(\sqrt{n}) \quad \text{aber} \quad \sqrt{n} \neq O((\log n)^k).$$

7. (10 Punkt) $O(\cdot)$ und $\Theta(\cdot)$ verhalten sich für Funktionen wie "$\leq$ " und "$=$" für Zahlen, d.h. sie definieren eine Ordnungsrelation auf Funktionen. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen eine monoton steigende Folge bezüglich dieser Ordnung. Beweisen Sie Ihre Antworten. (Dabei ist ε eine beliebige aber feste reelle Zahl.)

$$n \log n \;,\; n^8 \;,\; n^{1+\varepsilon} \;,\; (1+\varepsilon)^n \;,\; (n^2 + 8n + \log^3 n)^4 \;\text{ und }\; n^2/\log n.$$