1. (10 Punkte) In der Vorlesung wurde der Begriff der *Reduktion* definiert. Zur Erinnerung, man sagt, Sprache $A \subset \Sigma^*$ *reduziert sich auf* Sprache $B \subset \Gamma^*$ (oder B ist schwerer als A), in Zeichen $A \preceq B$, wenn es eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, sodass für all $x \in \Sigma^*$ gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$.

   Es sei nun $\mathcal{RE}$ die Menge aller (Turing) akzeptierbaren Sprachen über dem Alphabet Σ mit $|\Sigma| \geq 2$. Eine Sprache $X \subset \Sigma^*$ heißt $\mathcal{RE}$*-schwer*, wenn für jede Sprache $A \in \mathcal{RE}$ gilt, $A \preceq X$. Die Sprache X heißt $\mathcal{RE}$*-vollständig*, wenn sie $\mathcal{RE}$-schwer ist und $X \in \mathcal{RE}$ gilt.

   Zeigen Sie, dass es eine $\mathcal{RE}$-vollständige Sprache gibt. Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. (20 Punkte) Welche der folgenden Probleme sind Turing-entscheidbar und welche nicht? Formulieren Sie sie jeweils als Sprachen und machen sie dann Aussagen über deren Entscheidbarkeit.

   (a) Gegeben seien eine TM M, ein Zustand q von M und ein String w. Erreicht M auf Eingabe w vom Startzustand aus irgendwann den Zustand q?

   (b) Gegeben seien eine TM M und ein Symbol a. Schreibt M mit leerer Eingabe je das Symbol a auf ihr Band?

   (c) Gegeben seien eine TM M und ein Wort w. Wenn M mit Eingabe w beginnt, rückt sie je ihren Kopf nach links?

   (d) Gegeben seien eine TM M und ein Wort w. Wenn M mit Eingabe w beginnt, bezeichne Z die Zelle des Bandes, in der das erste Zeichen von w geschrieben ist. D.h. die Stelle, an der der L/S–Kopf zu Beginn der Rechnung steht. Rückt die Maschine während der Berechnung je ihren Kopf links von Z?

   (e) Gegeben seien zwei Turing Maschinen M und M'. Gilt $L(M) = \overline{L(M')}$?

3. (10 Punkte) Für eine Zahl c definieren wir c-PCP, das *Postsche Korrespondenzproblem mit höchstens c Wortpaaren*, als die Sprache bestehend aus denjenigen Folgen von höchstens c Wortpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ (also $k \leq c$), für die es eine Indexfolge $i_1, \ldots, i_n$ gibt, sodass $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_n}$.

   Gibt es eine Zahl c, sodass c-PCP nicht entscheidbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort sorgfältig.

4. (10 Punkte) Zeigen Sie, dass das Postsche Korrespondenzproblem über einem einelementigen Alphabet $\Sigma = \{1\}$ *entscheidbar* ist.