Betrachten wir zunächst zwei weitere Arten von Registermaschinen:

- Eine *komfortable* k–Register Maschine besitzt k Register $x_1, \ldots, x_k$, in denen jeweils eine natürliche Zahl gespeichert werden kann. Die Befehle für die Maschine sind von der Form

$$x_i \quad = \quad x_j \circ x_k \qquad \text{oder} \qquad x_i \quad = \quad x_j \circ c,$$

wobei $\circ$ eine der Operationen aus $\{+, \dot{-}, \text{div}, \text{mod}\}$ sein kann. Weiterhin gibt es ein Prädikat, das einen Vergleich mit 0 erlaubt ($x_i \overset{?}{\neq} 0$). Solche Maschinen unterscheiden sich also von den aus der Vorlesung bekannten Registermaschinen nur dadurch, dass sie als zweiten Operanden in den Befehlen wiederum Register zulassen und nicht nur Konstanten.

- Eine Registermaschine *mit indirekter Adressierung* hat eine unbegrenzte Anzahl von Registern $x[i]$ für $i \in \mathbb{N}$, in denen ebenfalls natürliche Zahlen gespeichert werden können. Hier sind die Befehle von der Form

$$\text{incr}(x[i]) \qquad \text{oder} \qquad \text{decr}(x[i])$$

sowie

$$\text{incr}(x[x[i]]) \qquad \text{oder} \qquad \text{decr}(x[x[i]]).$$

Solche Maschinen können den Inhalt der Register also lediglich inkrementieren bzw. dekrementieren, und die Nummern der Register dürfen entweder direkt als Konstanten angegeben werden oder wiederum in einem Register gespeichert sein. Ist z. B. in Register 47 die Zahl 11 gespeichert und in Register 11 die Zahl 4811, so wird durch den Befehl incr($x[x[47]]$) der Inhalt von Register 11 zu 4812 verändert.

Auch diese Maschinen erlauben einen Vergleich der Registerinhalte mit Null, wobei die Adressen wieder direkt oder indirekt angegeben werden können.

1. (10 Punkte) Zeigen Sie: Jede *komfortable* k-Registermaschine kann von einer gewöhnlichen k'-Registermaschine schrittweise simuliert werden.

2. (20 Punkte) Zeigen Sie: Jede Registermaschine mit indirekter Adressierung kann von einer *komfortablen* k–Registermaschine schrittweise simuliert werden. Dabei ist k eine für *alle* Registermaschinenprogramme gültige Konstante.

3. (20 Punkte) Stellen Sie folgende Funktionen als *primitiv rekursive* Funktionen dar:

$$\begin{aligned}
exp(x, y) &= x^y \text{ und dabei sei } 0^0 = 1 \\
log(x, z) &= \begin{cases} y \text{ mit } x^y = z \text{ falls es existiert} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \\
rest(x, y) &= \text{Rest der ganzzahligen Division von } y \text{ durch } x + 1 \\
teilt(x, y) &= \begin{cases} 0, \text{ wenn } y \text{ Vielfaches von } x + 1 \text{ ist} \\ 1, \text{ wenn } y \text{ kein Vielfaches von } x + 1 \text{ ist} \end{cases} \\
istprim(x) &= \begin{cases} 0, \text{ wenn } x \text{ Primzahl ist} \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$