1. (10 Punkte)
Sei M eine deterministische Turingmaschine, die als Eingabe Paare von Worten aus Σ^* erhält. Dazu definieren wir die Sprache

$$L_M = \{w \mid \exists z \in \Sigma^* \text{ so dass } M \text{ auf Eingabe } w\$z \text{ hält } \}.$$

Zeigen Sie, dass zum einen alle diese Sprachen Turing–akzeptierbar sind, und dass weiterhin jede Turing–akzeptierbare Sprache L von dieser Form ist; dass es also eine Turingmaschine M gibt mit der Eigenschaft $L_M = L$.

2. (5 Punkte)
Im Initialisierungsschritt der Universellen Turingmaschine wird aus der Eingabe "$\langle M \rangle\, w$" zunächst die Kodierung der Maschine M auf das zweite Band kopiert. Warum kopiert man nicht das Eingabewort w?

3. (10 Punkte)
Geben Sie eine Grammatik an, die folgende Sprache erzeugt:

$$\{1^n\$1^m\$1^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

4. (15 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, T, A, B, \$\}, \{a, b\}, P, S)$ mit der folgenden Menge P von Produktionen:

$$\begin{array}{rcl}
S & \longrightarrow & T\$ \\
T & \longrightarrow & a\,TA \mid b\,TB \mid \varepsilon \\
\$ & \longrightarrow & \varepsilon \\
\\
Aa & \longrightarrow & aA \\
Ab & \longrightarrow & bA \\
A\$ & \longrightarrow & a\$ \\
Ba & \longrightarrow & aB \\
Bb & \longrightarrow & bB \\
B\$ & \longrightarrow & b\$
\end{array}$$

(a) Geben Sie eine Ableitung des Wortes *abababab* an.

(b) Welche Sprache wird von der Grammatik erzeugt? Begründen Sie Ihre Antwort.