1. Zeigen Sie, dass die Sprache aller Strings in $\{a, b, c\}^*$, die genau gleich viele $a$'s, $b$'s und $c$'s enthalten, Turing-akzeptierbar ist.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\beta(n)$ die *Binärdarstellung* von $n$ (also $\beta(n)$ ist ein String in $\{0, 1\}^*$) und $\alpha(n)$ sei die *Unärdarstellung* von $n$, d.h. $\alpha(n) = 1^n$, also das Wort, das genau aus $n$ Einsen besteht.

   Geben Sie Turing Maschinen zur Berechnung der Funktionen

   $$f : \{1\}^* \to \{0, 1\}^* \ : \ f(\alpha(n)) = \beta(n)$$

   und

   $$g : \{0, 1\}^* \to \{1\}^* \ : \ g(\beta(n)) = \alpha(n)$$

   an.

3. Eine 2–dimensionale Turing Maschine ist ein Rechenautomat, den man sich folgendermaßen vorstellen kann: Es gibt eine endliche Steuerung; diese hat Kontrolle über einen Lese/Schreibkopf, der über einem 2–dimensionalen Band, also sozusagen einem Blatt Papier, steht. Dieses Blatt ist nach allen Seiten unbegrenzt. Durch horizontale und vertikale Linien ist es in Zellen unterteilt. In einem Rechenschritt kann die Maschine den Inhalt der Zelle, über der der Kopf steht, lesen und dann abhängig vom Zustand und dem gelesenen Wert ein neues Symbol in die Zelle schreiben, in einen neuen Zustand übergehen und schließlich den Kopf entweder unbewegt lassen oder um eine Zelle nach links, rechts, oben oder unten rücken.

   Zu Beginn eines Rechengangs enthalten alle Zellen Leerzeichen bis auf einen endlichen Teil einer Zellenzeile, die das Eingabewort enthält. Der Kopf steht über dem linkesten Symbol des Eingabewortes.

   Alles, was nun von "normalen" Turing Maschinen berechnet werden kann, kann auch klarerweise von 2-dimensionalen Turing Maschinen berechnet werden. Man braucht die normale Maschine nur als eine 2-dimensionale auffassen, die den Lese/Schreibkopf nie nach unten oder oben bewegt.

   2-dimensionale Turing Maschinen sind also möglicherweise "mächtigere" Rechenautomaten als normale Turing Maschinen und können zum Beispiel Sprachen akzeptieren, die von keiner normalen Turing Maschine akzeptiert werden können.

   Zeigen Sie, daß dem nicht so ist. Zeigen Sie, daß für jede 2–dimensionale Maschine $M$ es eine normale Turingmaschine $M'$ gibt, die genau die gleiche Sprache wie Maschine $M$ akzeptiert.

   (Ein vollkommen formaler Beweis wird hier nicht erwartet.)

4. Es sei $Q$ die Menge aller unendlichen 0-1-Strings der Form $uv^\infty$, mit $u \in \{0, 1\}^*$ und $v \in \{0, 1\}^+ \setminus \{1\}^+$. Das ist also die Menge aller 0-1-Strings, in denen nach einem endlichen Präfix $u$ die Periode $v$ immer wieder wiederholt wird.

   (a) Zeigen Sie, dass die Menge $Q$ genau die Binärdarstellungen aller rationalen Zahlen im Interval $[0, 1)$ enthält.

   (b) Es sei nun $q_1, q_2, \ldots$ eine Aufzählung von Elementen aus $Q$. Wenn man Cantors Diagonalisierungsverfahren auf diese Aufzählung anwendet, welche Schlüsse kann man dann über ihre Vollständigkeit ziehen?

   *Hinweis:* Denken Sie Ihr Argument wirklich bis zum Ende durch. Bei dieser Aufgabe ist man leicht versucht, zu früh aufzuhören.