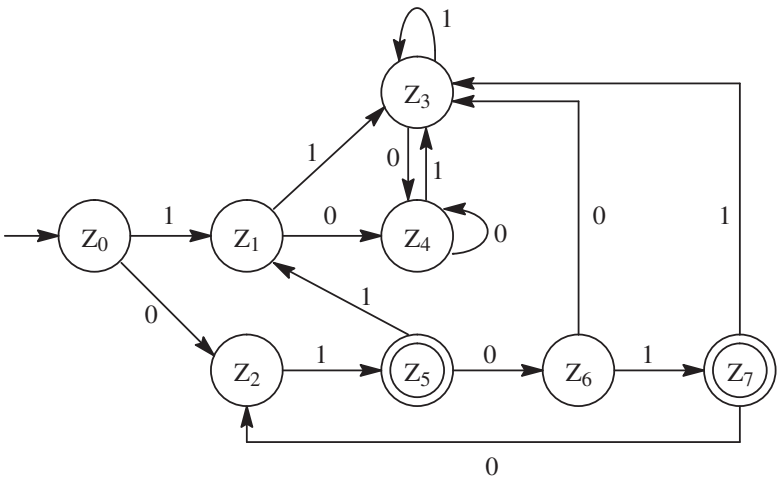
Prof.Dr.-Ing. G. Weikum
Achim Kraiß
Thomas Warken

Aufgabenblatt zur Wiederholungsklausur *Informatik III* (WS 97/98)

Aufgabe 1 (4+1+3+2+2= 12 Punkte)

Gegeben sei der folgende deterministische endliche Automat (DEA) M mit dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:



a) Minimieren Sie diesen DEA durch Ermittlung aller Paare nichtäquivalenter Zustände. Benutzen Sie dazu die beigefügte Tabelle auf dem Deckblatt, und tragen Sie, wie in der Vorlesung gezeigt, für jedes Paar ein, in welcher Iteration Sie es gefunden haben.

b) Welche Sprache akzeptiert M ?

c) Geben Sie die Äquivalenzklassen der Nerode-Relation explizit an (also in Form von Mengenbeschreibungen wie z.B. $\{a^{(i+3)}b^i \mid i \geq 0\}$).

d) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik für die von M akzeptierte Sprache an.

e) Geben Sie einen regulären Ausdruck für die von M akzeptierte Sprache an.

Aufgabe 2 (6+4+2=12 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß die Sprache

$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } i \leq j \text{ und } i \leq k\} \subseteq \{a, b, c\}^*$$

nicht kontextfrei ist.

b) Zeigen Sie durch Angabe einer Grammatik, daß die Sprache

$$L_2 = \{x^i y^j x^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } j < i\} \cup \{x^i y^j x^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ und } k < i\} \subseteq \{x, y\}^*$$

kontextfrei ist.

c) Zeigen Sie, daß die unter b) angegebene Sprache nicht deterministisch kontextfrei ist (also von keinem deterministischen Kellerautomaten akzeptiert wird).

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ordnen Sie die folgende Sprache L (so exakt wie möglich) in die Chomsky-Hierarchie ein (regulär/kontextfrei/kontextsensi
akzeptierbar ?). Beweisen Sie Ihre Aussage.

$$L = \{a^k \mid \text{ k ist eine Fibonacci-Zahl } \} \subseteq \{a\}^*$$

Dabei sind die Fibonacci-Zahlen F_i (für $i \in \mathbb{N}_0$) wie folgt definiert:

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,$$
$$F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ für } i \geq 0.$$

Aufgabe 4 (4+4+4+4= 16 Punkte)

Geben Sie an, ob die folgenden Sprachen

- entscheidbar oder
- nicht entscheidbar, aber rekursiv aufzählbar, oder
- nicht einmal rekursiv aufzählbar

sind. Beweisen Sie Ihre jeweilige Aussage (unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung).

a) $L = \{w \mid w$ ist der Code (die Gödelnummer) einer nichtdeterministischen Turing-Maschine M_w, die einen Zustand hat, der bei keiner Eingabe x erreicht wird $\}$

b) $L = \{(w, x) \mid w$ ist der Code (die Gödelnummer) einer nichtdeterministischen Turing-Maschine M_w, die bei Eingabe x jeden ihrer Zustände mindestens einmal durchläuft $\}$

c) $L = \{w \mid w$ ist der Code (die Gödelnummer) einer nichtdeterministischen Turing-Maschine M_w, die eine nichtkonstante Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (also $f(x) \neq f(y)$ für mindestens ein Paar $x, y \in \mathbb{N}$) berechnet $\}$

d) $L = \{(w_1, w_2) \mid w_1$ und w_2 sind Codes (Gödelnummern) nichtdeterministischer Turing-Maschinen M_{w1}, M_{w2}, für die gilt: $\mid T(M_{w1}) \mid > \mid T(M_{w2}) \mid\}$
Dabei ist $\mid T(M) \mid$ die Kardinalität der von M akzeptierten Sprache.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Zeigen Sie, daß das folgende Problem "Unabhängige Menge" NP-vollständig ist:

Gegeben:
eine gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit Knotenmenge V und Kantenmenge $E \subseteq V \times V$
sowie eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage:
Gibt es eine Knotenmenge $S \subseteq V$ mit $\mid s \mid > k$, so daß für alle $x, y \in S$ gilt: $(x, y) \notin E$ (d.h. keine zwei Knoten in S sind verbunden) ?

Hinweise:

1. Sie können sich auf die NP-Vollständigkeit aller Probleme beziehen, bei denen diese Eigenschaft in der Vorlesung (bzw. im Schöning-Buch) oder auf den Übungsblättern explizit erwähnt wurde.
2. Das Problem ist eng mit dem *CLIQUEN*-Problem "verwandt".