**Informatik III** | **Sommersemester 1999**

**Abschlußklausur** | **Bearbeitungszeit: 3 1/2 Stunden**

1. (8 Punkte) Gegeben seien die regulären Ausdrücke:

$$R_1 \;=\; 0 \mid 001 \qquad R_2 \;=\; 0^*11^* \qquad R_3 \;=\; (0 \mid 1)\ 01$$

   (a) Geben Sie für jeden Ausdruck einen NEA an, der die gleiche Sprache akzeptiert.

   (b) Bestimmen Sie für die folgenden Ausrücke NEA's, indem Sie die Automaten aus Teil (a) geeignet miteinander verbinden:

$$R_2 \mid R_3, \quad R_1 \cdot R_2, \quad R_3^*$$

2. (10 Punkte)

   (a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

      i. $4711 \in \{2,4,5,7\}^* \cdot \{1,3,6\}^*$

      ii. $abcd \in \{a\} \cdot \{c,d\}^* \cdot \{b\}^*$

      iii. $\{b\}^* \cdot \{a\}^* \ \cap\ \{a\}^* \cdot \{b\}^* \ = \ \{a\}^* \cup \{b\}^*$

   (b) Geben Sie für die nachfolgenden beiden Sprachen aus $\{0,1,2\}^*$ reguläre Ausdrücke an, die die Sprache erzeugen.

      i. $L_1 \;=\; \{w \in \{0,1,2\} \mid$ die Anzahl der Einsen in $w$ ist durch 3 teilbar$\}$

      ii. $L_2 \;=\; \{w \in \{0,1\} \mid w$ ist von `11` und `111` verschieden$\}$

3. (15 Punkte) Klassifizieren Sie die folgenden Sprachen. (Sind sie regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, rekursiv aufzählbar, nicht entscheidbar etc.?) Beweisen Sie Ihre Antworten.

   (a) $\{\langle M\rangle \mid$ für TM $M$ ist $L(M)$ regulär $\}$

   (b) $\{a^n b^n c^m \mid n \le m \le 2n\}$

   (c) $\{a^n b^m \mid n \le m \le 2n\}$

   (d) $\{a^n b^m \mid$ $n$ ist durch 3 teilbar und $m$ nicht durch 5 teilbar $\}$

   (e) $\{www \mid w \in \{a,b\}^*\}$

4. (8 Punkte) Für welche Sprachen $L$ gilt: $|f_L(\Sigma^*)| = 1$. Wie sieht dann die jeweilige Folgesprache aus?

5. (8 Punkte) In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass es eine *universelle Turing Maschine* gibt, also eine Turing Maschine, die nur Strings der Form $\langle M\rangle\$w$ akzeptiert, wobei Turingmaschine $M$ das Wort $w$ akzeptiert.

   Gibt es auch einen *universellen endlichen Automaten*? Das heißt, gibt es einen endlichen Automaten $U$, der nur Strings der Form $\langle M\rangle\$w$ akzeptiert, wobei $\langle M\rangle$ die Kodierung eines deterministischen endlichen Automaten darstellt mit $w \in L(M)$?

   Wenn ja, skizzieren Sie so einen universellen Automaten, wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

6. (8 Punkte) Für welche der Sprachklassen in der Chomsky-Hierarchie gilt folgende Aussage: Wenn $B$ eine Sprache in der Sprachklasse ist und $A \subset B$, dann ist auch $A$ in der Sprachklasse.

7. (10 Punkte) Kommentieren Sie die folgende Behauptung und den zugehörigen Beweis.

   *Behauptung:* Das Problem DNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

   Das Problem DNF-SAT ist dabei wie folgt definiert:
   INSTANZ: eine Formel $F$ der Aussagenlogik in disjunktiver Normalform, also $F$ ist die Disjunktion ("Veroderung") von Konjunktionen von Literalen.
   FRAGE: Ist $F$ erfüllbar?

   *Beweis der Behauptung:* DNF-SAT ist offensichtlich in $\mathcal{NP}$: Wenn eine Formel $F$ erfüllbar ist, kann man eine erfüllende Variablenbelegung "erraten" und dann in polynomieller Zeit verifizieren, dass diese Belegung tatsächlich $F$ wahr macht.

   DNF-SAT ist $\mathcal{NP}$-schwer, da 3-SAT, was bekanntlicherweise $\mathcal{NP}$-vollständig ist, sich auf DNF-SAT reduzieren lässt: Sei $G$ eine Instanz von 3-SAT, also eine Formel der Aussagenlogik, die eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, wobei in jeder Disjunktion höchstens drei Literale vorkommen. Durch wiederholte Anwendung des distributiven Gesetzes lässt sich $G$ in eine äquivalente Formel $F$ in disjunktiver Normalform umwandeln, also in eine Instanz von DNF-SAT, und es gilt $G$ ist erfüllbar, genau dann wenn $F$ erfüllbar ist.