Kapitel 3: Grundlagen aus der Logik

Logik ist eine wichtige Grundlage, um über die Semantik von Datenbankanfragesprachen (und später auch über die Semantik von Softwareentwurfssprachen) präzise reden zu können. In einer Logik werden zunächst einmal *Formeln* als syntaktische Gebilde definiert. Auf Formeln kann man dann *Ableitungs-, Beweis- oder Deduktionsregeln* definieren, mit denen man Formeln aus einer gegebenen Formelgrundmenge mechanisch herleiten kann; wir schreiben

$F_1,...,F_n \vdash G$ oder $\dfrac{F_1,...,F_n}{G}$ für die Ableitung von Formel G aus den Formeln F_1, ..., F_n.

Eine Menge von (schematisierten) Ableitungsregeln nennt man einen *Ableitungs-, Beweis- oder Deduktionskalkül*.
Dieser syntaktischen (*beweistheoretischen*) Seite einer Logik steht die (*modellorientierte*) *Semantik* von Formeln gegenüber. Dazu werden bestimmte Komponenten der Formeln, insbesondere Aussagen-, Funktions- und Prädikatsymbole, in einer (mathematischen) Struktur interpretiert (z.B. den natürlichen Zahlen mit Funktionen wie Addition, Multiplikation, usw. und Prädikaten wie IstPrimzahl oder SindTeilerfremd); auf dieser Basis erhalten ganze Formeln einen Wahrheitswert in der der *Interpretation* zugrundeliegenden Struktur. Wenn eine gegebene Formelmenge G unter einer bestimmten Interpretation ψ in einer Struktur S wahr ist, nennt man die Struktur ein *Modell* der Formelmenge, und wir schreiben $\psi \models G$ oder $\models_\psi G$.

Zwischen syntaktischer Ableitung und semantischer Interpretation besteht typischerweise ein Zusammenhang: idealerweise wünscht man sich, daß für eine gegebene Grundformelmenge G und eine Struktur S, die ein Modell von G ist, jede mit einem Deduktionskalkül ableitbare Formel in S wahr ist (*Korrektheit des Kalküls*) und umgekehrt jede in S wahre Formel aus G syntaktisch ableitbar ist (*Vollständigkeit des Kalküls*). Für bestimmte Strukturen gibt es korrekte und vollständige Kalküle, für andere nicht. Beispielsweise besagt der berühmte Satz von Gödel, daß es für die Struktur der arithmetischen Gleichungen über den natürlichen Zahlen mit den Funktionen Addition und Multiplikation und darauf aufgebauten prädikatenlogischen Formeln keinen vollständigen Ableitungskalkül geben kann.

3.1 Aussagenlogik

Definition:
Eine atomare Formel der Aussagenlogik ist eine Aussagenkonstante True oder False oder eine Aussagevariable der Form Ai (i=1, 2, ...).
Die Menge der Formeln der Aussagenlogik ist induktiv wie folgt definiert:

(i) Jede atomare Formel ist eine Formel.

(ii) Wenn F und G Formeln sind, dann auch (F), $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ sowie $F \Rightarrow G$ als Kurzschreibweise für $\neg F \vee G$ und $F \Leftrightarrow G$ als Kurzschreibweise für $(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge \neg G)$ Formeln. Statt $\neg F$ schreibt man häufig auch $\overline{F}$.

Die Formeln der Aussagenlogik sind also Aussageformen über Aussagevariablen.

Um die syntaktische Analyse von Ausdrücken eindeutig zu machen, kann man entweder vollständige Klammerung verlangen (d.h. in (ii) nur (F), $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$ zulassen) oder Präzedenzen festlegen, daß $\neg$ stärker bindet als $\wedge$ oder $\vee$ und diese wiederum stärker als $\Rightarrow$ oder $\Leftrightarrow$.

Definition:
Sei F eine Formel der Aussagenlogik mit atomarer Formelmenge D. Eine *passende Struktur* S zu F ist eine Menge P von Aussagen (die jeweils wahr oder falsch sind), so daß jede Aussagenvariable in D einer dieser Aussagen zugeordnet werden kann. P enthält ggf. die immer wahre Aussage 1 und die immer falsche Aussage 0. Eine *Interpretation* von F ist eine Abbildung ψ: $D \rightarrow P$, für die gilt $\psi(True)=1$, $\psi(False)=0$, $\psi(Ai)=1$ bzw. 0, falls $\psi(Ai)$ in S wahr bzw. falsch ist.
ψ wird wie wie folgt auf beliebige Formeln F, G, usw. über D fortgesetzt:
(i) $\psi((F)) = \psi(F)$; (ii) $\psi(F \wedge G)= 1$ falls $\psi(F)= \psi(G)=1$, 0 sonst;
(iii) $\psi(F \vee G)= 1$ falls $\psi(F)= 1$ oder $\psi(G)=1$, 0 sonst; (iv) $\psi(\neg F)=1$ falls $\psi(F)=0$, 0 sonst.

Eine Interpretation einer aussagenlogischen Formel ist also im wesentlichen eine Belegung der Aussagevariablen mit Wahrheitswerten.

Definition:
Sei F eine Formel und ψ eine Interpretation von F.
Wenn $\psi(F)=1$ ist, heißt ψ *Modell* von F. Wir schreiben dann $\psi \models F$ (oder $\models_\psi F$).
F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell hat, ansonsten *unerfüllbar*.
F heißt *(allgemein-)gültig* oder *Tautologie*, falls jede Interpretation in einer zu F passenden Struktur ein Modell von F ist.

Satz:
F ist Tautologie genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Definition:
G heißt *Folgerung* (Konsequenz) von F1, ..., Fk, geschrieben F1, ..., Fk $\models$ G, wenn für jede Interpretation ψ in einer passenden Struktur gilt: falls ψ ein Modell von F1, ..., Fk ist, dann ist ψ auch ein Modell von G. F und G heißen (semantisch) *äquivalent*, geschrieben $F \equiv G$, falls für jede Interpretation ψ gilt: $\psi(F)= \psi(G)$.

Satz:
G ist Folgerung von F1, ..., Fk genau dann, wenn $(F1 \wedge F2 \wedge ... \wedge Fk) \Rightarrow G$ eine Tautologie ist.
F und G sind äquivalent genau dann, wenn F Folgerung von G ist und umgekehrt.

Beispiele:

1) Formeln über Variablen T, P:

   F1: $T \Rightarrow \neg P$, F2: $P \wedge \neg T$ bzw. zusammengefaßt

   F: $(T \Rightarrow \neg P) \wedge (P \wedge \neg T)$

   Interpretation: $\psi(T)$ = „7 ist durch 2 teilbar" (falsch), $\psi(P)$ = „7 ist eine Primzahl" (wahr)

   ψ ist ein Modell von F1 und F2 bzw. von F.

2) Formeln über Variablen S, R, A:

   F1: $S \Rightarrow \neg R$, F2: $\neg R \Rightarrow S$, F3: $A \Rightarrow \neg S$, F4: A bzw. zusammengefaßt

   F: $(S \Rightarrow \neg R) \wedge (\neg R \Rightarrow S) \wedge (A \Rightarrow \neg S) \wedge (A)$

   Interpretation:

   $\psi(S)$ = „die Sonne scheint" (falsch) , $\psi(R)$ = „es regnet" (wahr), $\psi(A)$ = „es ist April" (wahr).

   ψ ist ein Modell von F1, F2, F3, F4 bzw. von F.

3) $\neg(\neg F) \Leftrightarrow F$ ist eine Tautologie;

   $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ ist erfüllbar (z.B. mit X: „dieser Raum ist nichtleer", Y: „das Licht ist an" und Z: „das Licht ist aus"), aber keine Tautologie;

   $F \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

Ein **Deduktionskalkül** ist eine endliche Menge von Ableitungsregeln der Form $P \vdash K$, wobei P eine endliche Formelmenge, die Menge der Prämissen (oder Hypothesen), ist und K eine Formel, die Konklusion oder Schlussfolgerung. Ein einfacher **Deduktionskalkül für die Aussagenlogik** besteht (z.B.) aus 5 Regeln:

(i)		$\vdash F \Rightarrow (F \Rightarrow F)$	
(ii)		$\vdash (F \Rightarrow (G \Rightarrow H)) \Rightarrow ((F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow H))$	
(iii)		$\vdash (\neg F \Rightarrow \neg G) \Rightarrow (G \Rightarrow F)$	
(iv)	$F \Leftrightarrow G, H$	$\vdash H[F/G]$	(Ersetzungsregel, Substitution)
(v)	$F \Rightarrow G, F$	$\vdash G$	(Abtrennungsregel, Modus Ponens)

wobei H[F/G] die Formel ist, die man aus H durch syntaktische Substitution von F durch G erhält.

Definition:

Sei H eine endliche Formelmenge – die Hypothesenmenge (z.B. Axiome einer spezifischen Struktur). Die Formel F heißt aus H ableitbar, in Zeichen: $H \vdash F$, wenn es eine endliche Sequenz F0, F1, ..., Fn von Formeln gibt mit Fn=F, so daß für alle Fi gilt: Fi ist Element von H, Fi ist eine der prämissenlosen Formeln (i) bis (iii) des Deduktionskalküls oder Fi ist aus F0, ..., F(i-1) mittels Regel (iv) oder (v) des Deduktionskalküls abgeleitet.

Für $H=\emptyset$ heißt F Theorem des Deduktionskalküls.

Satz:

Der angegebene Deduktionskalkül mit den Regeln (i) bis (v) ist korrekt und vollständig, d.h.

  $H \vdash F$ genau dann, wenn $H \models F$

   (d.h. $H \Rightarrow F$ ist eine Tautologie bzw. F ist wahr in jeder Struktur, in der H wahr ist)

  und – als Sonderfall mit $H=\emptyset$: $\vdash F$ genau dann, wenn $\models F$

   (d.h. F ist eine Tautologie bzw. F ist in jeder passenden Struktur wahr)

Beweis: durch Induktion über den Aufbau von F und entsprechende Fallunterscheidungen

Definition:
Eine (endliche) Formelmenge H heißt Axiomensystem für eine Formelmenge M (z.B. alle wahren Theoreme einer mathemat. Struktur), wenn: $\{\psi \mid \psi \text{ ist Modell von } H\} = \{\psi \mid \psi \text{ ist Modell von } M\}$.

Alternative Deduktionskalküle könnten z.B. die Brute-Force-Methode verwenden, Wahrheitstafeln für $H \Rightarrow F$ aufzustellen (mit allen Kombinationen möglicher Wahrheitswerte für die Aussagenvariablen und alle Teilformeln), oder eine geeignete Teilmenge der folgenden (aus dem angegebenen Kalkül ableitbaren und so beweisbaren) Äquivalenzen und der Deduktionsregeln (i) bis (v) verwenden:

$\neg\neg F \Leftrightarrow F$	(Doppelnegation)
$F \wedge F \Leftrightarrow F$	(Idempotenz)
$F \vee F \Leftrightarrow F$	
$F \wedge G \Leftrightarrow G \wedge F$	(Kommutativität)
$F \vee G \Leftrightarrow G \vee F$	
$F \wedge (G \wedge H) \Leftrightarrow (F \wedge G) \wedge H$	(Assoziativität)
$F \vee (G \vee H) \Leftrightarrow (F \vee G) \vee H$	
$F \wedge (F \vee G) \Leftrightarrow F$	(Absorption)
$F \vee (F \wedge G) \Leftrightarrow F$	
$F \wedge (G \vee H) \Leftrightarrow (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$	(Distributivität)
$F \vee (G \wedge H) \Leftrightarrow (F \vee G) \wedge (F \vee H)$	
$\neg (F \wedge G) \Leftrightarrow (\neg F \vee \neg G)$	(Gesetz von de Morgan)
$\neg (F \vee G) \Leftrightarrow (\neg F \wedge \neg G)$	
$F \vee 1 \Leftrightarrow 1$	(Tautologieregeln)
$F \wedge 1 \Leftrightarrow F$	
$F \vee 0 \Leftrightarrow F$	(Unerfüllbarkeitsregeln)
$F \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	
$F \vee (\neg F) \Leftrightarrow 1$	(Tertium non datur)
$F \wedge (\neg F) \Leftrightarrow 0$	(Kontradiktion)
$((F \Leftrightarrow G) \wedge H) \Leftrightarrow ((F \Leftrightarrow G) \wedge H[F/G])$	(Substitution)

Beispiel:
Auf die Frage „Worin besteht das Geheimnis Ihres Lebens?“ antwortet ein Hundertjähriger:
Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch.
Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit habe, verzichte ich auf Eiscreme.
Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.

Modellierung:
Formel G: $(\neg B \Rightarrow F) \wedge ((F \wedge B) \Rightarrow \neg E) \wedge ((E \vee \neg B) \Rightarrow \neg F)$

Vereinfachung, sprich Deduktion (mit Unterstreichung als Negation):

$G \Leftrightarrow (B \vee F) \wedge (\underline{F \wedge B} \vee \underline{E}) \wedge (\underline{(E \vee \neg B)} \vee \underline{F})$	nach Definition der Implikation
$\Leftrightarrow (B \vee F) \wedge (\underline{F} \vee \underline{B} \vee \underline{E}) \wedge ((\underline{E} \wedge B) \vee \underline{F})$	nach dem Gesetz von de Morgan
$\Leftrightarrow (B \vee F) \wedge (\underline{F} \vee \underline{B} \vee \underline{E}) \wedge (\underline{E} \vee \underline{F}) \wedge (B \vee \underline{F})$	nach dem Distributivitätsgesetz
$\Leftrightarrow ((B \vee F) \wedge (B \vee \underline{F})) \wedge ((\underline{F} \vee \underline{B} \vee \underline{E}) \wedge (\underline{E} \vee \underline{F}))$	wegen Kommutativität und Assoziativität
$\Leftrightarrow ((B \vee (F \wedge \underline{F})) \wedge ((\underline{F} \vee \underline{E}) \vee (\underline{B} \wedge 0))$	nach Distributivitätsgesetz und Tautologieregel
$\Leftrightarrow ((B \vee 0) \wedge ((\underline{F} \vee \underline{E}) \vee 0)$	wegen Kontradiktion und Unerfüllbarkeit
$\Leftrightarrow B \wedge (\underline{F} \vee \underline{E})$	wegen Unerfüllbarkeitsregel

Interpretation: Trinke zu jeder Mahlzeit Bier, und iss niemals Fisch mit Eiscreme!

3.2 Prädikatenlogik 1. Ordnung

Motivation: Man möchte kompliziertere Zusammenhänge in einer formalen Logik präzisieren können, die in der Aussagenlogik nicht ausdrückbar sind.
Beispiele:
1) Es gibt unendlich viele Primzahlen:
$\forall q\ \exists p\ \forall x,y\ (\ p>q \wedge ((x>1 \wedge y>1) \Rightarrow (x \cdot y \neq p))\ )$ bzw.
$\forall q\ \exists p\ \forall x,y\ (greater(p,q) \wedge ((greater(x,1) \wedge greater(y,1)) \Rightarrow (\neg\ equal(mult(x,y),p)))\ )$
2) Das kgV zweier teilerfremder Primzahlen ist ihr Produkt:
$\forall x,y\ (ggT(x,y)=1 \Rightarrow kgV(x,y)=x \cdot y)$
3) Invarianten von Programmen (mit dem Gesamtziel der Programmverifikation)
4) Datenbankanfragen (siehe Kapitel 4) und Datenbankinvarianten (siehe Kapitel 7)

Definition:
Gegeben seien Variablen xi (i=1,2, ...), Prädikatsymbole Pi der Stelligkeit ki (i=1,2, ...), d.h. Prädikatsymbole mit ki Argumenten, und Funktionssymbole fi der Stelligkeit li(i=1,2, ...).
0-stellige Prädikatsymbole sind Aussagen, 0-stellige Funktionssymbole sind Konstanten.
Terme sind induktiv definiert:
- (i) Jede Variable ist ein Term.
- (ii) Wenn t1, ..., tk Terme sind und fi ein k-stelliges Funktionssymbol ist, dann ist auch fi(t1, ..., tk) ein Term.

Eine *atomare Formel* hat die Form Pi(t1, ..., tk) mit einem k-stelligen Prädikatsymbol Pi und Termen t1, ..., tk.
Formeln der Prädikatenlogik 1. Ordnung sind induktiv definiert:
- (i) Jede atomare Formel ist eine Formel.
- (ii) Für Formeln F und G sind auch $\neg F$, $F \wedge G$, $F \vee G$ und (F) Formeln.
- (iii) Für eine Variable xi und eine Formel F sind auch $\forall$xi (F) und $\exists$xi (F) Formeln. $\forall$ und $\exists$ heißen All- bzw. Existenzquantor, xi ist eine quantifizierte (gebundene) Variable, und F ist der Rumpf der Formel.

Zur eindeutigen Syntaxanalyse kann man entweder vollständige Klammerung verlangen oder Präzedenzen festlegen, so daß Junktoren ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) stärker binden als Quantoren und die Präzedenzen der Aussagenlogik gelten. Statt $\forall x\ \forall y\ \forall z$ ... schreiben wir auch kurz $\forall x,y,z$, und Analoges gilt für $\exists$.

Eine Variable x in einer Formel F heißt *gebunden*, wenn x in einer Teilformel der Form $\forall x$ (F) oder $\exists x$ (F) vorkommt; ansonsten heißt x *frei*. Formeln ohne freie Variablen heißen geschlossen.
Beispiel: In $\forall x\ (P(x,y) \wedge \exists z\ (Q(z,x)))$ sind x und z gebunden, und y ist frei.

Als notationelle Konvention für Formeln verlangen wir, daß keine Variable an mehr als einen Quantor gebunden wird und daß keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt. Dies ist durch einfache Umbenennung von Variablen (Bereinigung) immer möglich.
Zur einfacheren Lesbarkeit werden häufig stilistische Konventionen für Bezeichner eingeführt: Variablen werden mit x, y, z, u, v, w, ... bezeichnet, Konstanten mit a, b, c, ..., Funktionssymbole der Stelligkeit ≥ 1 mit f, g, h, ... und Prädikatsymbole mit P, Q, R, S, ...

Semantik von prädikatenlogischen Formeln

Definition:
Gegeben sei eine Menge von Funktions- und Prädikatsymbolen (z.B. alle in einer Formel oder Formelmenge vorkommenden Symbole) mit entsprechenden Stelligkeiten. Eine dazu passende *Struktur* ist ein Tripel S = (U, fun, pred) mit

- einem *Universum* (einer *Trägermenge*) U von Individuen (z.B. ganzen Zahlen oder Zeichenketten),
- einer Menge fun von *Funktionen* fi: $U \times ... \times U \rightarrow U$ der Stelligkeit li, so daß jedes Funktionssymbol der Stelligkeit li eine Funktion derselben Stelligkeit existiert,
- einer Menge pred von *Prädikaten* Pi: $U \times ... \times U \rightarrow \{0,1\}$ der Stelligkeit ki, so daß jedes Prädikatsymbol der Stelligkeit ki ein Prädikat derselben Stelligkeit existiert.

Die *Interpretation* ψ einer Formel F in einer passenden Struktur S = (U, fun, pred) ist eine Abbildung, die das Universum U festlegt und jedem Funktions- und Prädikatsymbol in F eine passende Funktion aus fun bzw. ein passendes Prädikat aus pred zuordnet. Dies ist also eine Abbildung ψ von atomaren Formeln ohne Variablen als Argumenten auf wahre oder falsche Prädikate in der gegebenen Struktur.

ψ wird wie wie folgt auf beliebige Formeln F, G, usw. und Terme über denselben Funktions- und Prädikatsymbolen fortgesetzt:

(i) $\psi((F)) = \psi(F)$; (ii) $\psi(F \wedge G)= 1$ falls $\psi(F)= \psi(G)=1$, 0 sonst;
(iii) $\psi(F \vee G)= 1$ falls $\psi(F)= 1$ oder $\psi(G)=1$, 0 sonst; (iv) $\psi(\neg F)=1$ falls $\psi(F)=0$, 0 sonst,
(v) $\psi(f(t1, ..., tk)) = \psi(f)(\psi(t1), ..., \psi(tk))$ für ein Funktionssymbol f und Terme t1, ..., tk,
(vi) $\psi(x) = a$ mit einem beliebigen $a \in U$ für eine (freie) Variable x
(vii) $\psi(P(t1, ..., tk)) = \psi(P)(\psi(t1), ..., \psi(tk))$ für ein Prädikatsymbol P und Terme t1, ..., tk,
(viii) $\psi(\forall x\ (F)) = 1$ falls $\psi(F[x/a])=1$ für alle $a \in U$, wobei F[x/a] die Formel ist, die man aus F erhält, wenn man alle Vorkommen von x durch a ersetzt, und
(ix) $\psi(\exists x\ (F)) = 1$ falls $\psi(F[x/a])=1$ für ein beliebiges $a \in U$.

Beispiel 1:
F: $\forall q\ \exists p\ \forall x,y$ (greater(p,q) $\wedge$ ((greater(x,1) $\wedge$ greater(y,1)) $\Rightarrow$ ($\neg$ equal(mult(x,y),p))))
Eine passende Struktur ist z.B. S = (N_0, {+, ·}, {>, =}).
Interpretation ψ:
add $\mapsto$ +, mult $\mapsto$ ·, greater $\mapsto$ >, equal $\mapsto$ =, q $\mapsto$ 1, p $\mapsto$ 2, x $\mapsto$ 3, y $\mapsto$ 4
ψ (F) = für jede natürliche Zahl q gibt es eine natürlich Zahl p, so daß für alle Zahlen x und y gilt:
p ist größer als q und falls x und y beide größer als 1 sind, ist x·y von p verschieden
(oder einfacher: zu jeder Zahl gibt es eine Primzahl, die größer ist als die Zahl)

Beispiel 2:
F: K (1, Lauer, Merzig) $\wedge$ K(2, Schneider, Homburg) $\wedge$ P(1, Papier) $\wedge$ B(7, 16, 1, 1, 100)
mit Prädikatsymbolen K, P und B und Konstanten 1, Lauer, usw.
Eine passende Struktur ist z.B. eine Datenbank mit dem folgenden Datenbankschema (d.h. eine Menge von Relationen über passenden kartesischen Produkten des Universums $N_0 \cup \Sigma^*$, der Menge aller natürlichen Zahlen und Zeichenketten über einem Standardalphabet Σ):
Kunden (KNr, Name, Stadt), Produkte (PNr, Bez), Bestellungen (Monat, Tag, KNr, PNr, Menge).
ψ (F) = 1, falls es die entsprechenden vier Tupel in der Datenbank gibt, 0 sonst.

Erweiterungen der Prädikatenlogik 1. Ordnung:

Eine Variation der Prädikatenlogik 1. Ordnung ist die *mehrsortige (typisierte) Variante*, bei der in einer passenden Struktur das Universum aus einer endlichen Menge von *Trägermengen (Sorten)* U1, ..., Um besteht und Funktionen und Prädikate mehrsortig sind mit einer *Signatur*, die neben der Stelligkeit die Sorten der Funktions- und Prädikatargumente festlegt. Eine solche Struktur nennt man auch eine mehrsortige Algebra.

Beispiel: U= {U1, U2} mit U1=R^n, U2=R und
Funktionen Addition: U1 $\times$ U1 $\rightarrow$ U1, Multiplikation: U1 $\times$ U2 $\rightarrow$ U1,
Skalarprodukt: U1 $\times$ U1 $\rightarrow$ U2, Vektorprodukt: U1 $\times$ U1 $\rightarrow$ U1, Nullvektor: $\rightarrow$ U1 sowie
Prädikaten Orthogonal: U1 $\times$ U1 $\rightarrow$ {0,1} usw.

Der Übergang zu einer mehrsortigen Logik verändert nicht die Ausdruckskraft der Prädikatenlogik 1. Ordnung. Man gewinnt jedoch an Ausdruckskraft, wenn man Prädikate schachteln kann, also Prädikate selbst Prädikate als Argument haben können, oder wenn man nicht nur Individuen, sondern auch Prädikate quantifizieren (also an Quantoren binden) darf. Solche Erweiterungen führen auf die *Prädikatenlogik höherer Ordnung*, die wir hier nicht weiter betrachten.

Ein Beispiel einer Formel höherer Ordnung ist die folgende Spezifikation der transitiven Hülle H einer binären Relation R:

$$\forall x,y \; (H(x,y) \Leftrightarrow \forall P \; ((R(x,y) \Rightarrow P(x,y)) \wedge \forall u,w,z \; (P(u,w) \wedge P(w,z) \Rightarrow P(u,z))) \\ \Rightarrow (H(x,y) \Rightarrow P(x,y)) \;)$$

Intuitive Interpretation :
H ist kleinste binäre Relation, die R enthält und transitiv abgeschlossen ist.
Also gilt für jede binäre Relationen P, dass sie, wenn sie R enthält und transitiv abgeschlossen ist, eine Obermenge von H sein muss.

Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit, Gültigkeit, Modell

Definition:
Sei F eine Formel der Prädikatenlogik 1. Ordnung und ψ eine Interpretation von F.
Wenn $\psi(F)=1$ ist, heißt ψ *Modell* von F. Wir schreiben dann $\psi \models F$ (oder $\models_\psi F$).
F heißt *erfüllbar*, falls F mindestens ein Modell hat, ansonsten *unerfüllbar*.
F heißt *(allgemein-)gültig* oder *Tautologie*, falls jede Interpretation in einer zu F passenden Struktur ein Modell von F ist.

Satz:
F ist Tautologie genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Definition:
G heißt *Folgerung* (Konsequenz) von F1, ..., Fk, geschrieben F1, ..., Fk $\models$ G, wenn für jede Interpretation ψ in einer passenden Struktur gilt: falls ψ ein Modell von F1, ..., Fk ist, dann ist ψ auch ein Modell von G. F und G heißen (semantisch) *äquivalent*, geschrieben $F \equiv G$, falls für jede Interpretation ψ gilt: $\psi(F)= \psi(G)$.

Satz:
G ist Folgerung von F1, ..., Fk genau dann, wenn $(F1 \wedge F2 \wedge ... \wedge Fk) \Rightarrow G$ eine Tautologie ist.
F und G sind äquivalent genau dann, wenn F Folgerung von G ist und umgekehrt.

Definition:
Eine Formelmenge H heißt ein Axiomensystem für eine Formelmenge M (z.B. alle wahren Theoreme einer mathematischen Struktur), falls gilt: $\{\psi \mid \psi$ ist Modell von H$\} = \{\psi \mid \psi$ ist Modell von M$\}$.

Beispiel:
Formeln F1, ..., F5 bzw. Formel $F= F1 \wedge ... \wedge F5$:
$F1 = \forall x,y,z\ (G(f(f(x,y),z), f(x,f(y,z))))$
$F2 = \forall x\ (G(f(x,e),x))$
$F3 = \forall x,y\ (G(x, y) \Leftrightarrow G(y, x))$
$F4 = \forall x\ \forall y\ \forall z\ (G(x,y) \wedge G(y,z) \Rightarrow G(x,z))$
$F5 = \forall x\ \exists y\ (G(f(x,y), e))$

Interpretation A (Modell):
U = Z (Menge der ganzen Zahlen), $\psi(G)$ = Gleichheit, $\psi(f)$ = Addition, $\psi(e) = 0$, $\psi(F)=1$ (wahr)
Interpretation B (kein Modell):
U = Z (Menge der ganzen Zahlen), $\psi(G)$ = Gleichheit, $\psi(f)$ = Multiplikation, $\psi(e) = 1$, $\psi(F)=0$
Interpretation C (Modell):
U = R (Menge der reellen Zahlen), $\psi(G)$ = Gleichheit, $\psi(f)$ = Multiplikation, $\psi(e) = 1$, $\psi(F)=1$
Interpretation D (kein Modell):
$U = N_0$ (Menge der natürlichen Zahlen), $\psi(G) = \geq$, $\psi(f)$ = Addition, $\psi(e) = 1$, $\psi(F)=0$
Interpretation E (kein Modell):
$U = \Sigma^*$, $\psi(G)$ = Gleichheit der Länge, $\psi(f)$ = Stringkonkatenation, $\psi(e) = \varepsilon$, $\psi(F)=0$

Deduktionskalküle

Es gibt Deduktionskalküle für die Prädikatenlogik 1. Ordnung, die korrekt und vollständig sind, z.B. den Resolutionskalkül oder den Tableaukalkül. Diese spielen z.B. in der Logikprogrammierung (z.B. in der Programmiersprache Prolog) oder beim automatischen Theorembeweisen eine Rolle. Es handelt sich jedoch nur um sog. Semientscheidungsverfahren: bei einer semantischen Tautologie als Eingabe terminiert das Ableitungsverfahren mit dem Resultat "gültig" (rein technisch beweist der Resolutionskalkül die Unerfüllbarkeit der negierten Eingabe), bei einer Nichttautologie (deren Negation erfüllbar ist) aber muß das Verfahren nicht terminieren.

Mittels dieser Kalküle (oder auch auf anderem Wege) kann man die Gültigkeit der folgenden - praktisch sehr nützlichen - Umformungsregeln beweisen:

> alle aussagenlogischen Äquivalenzen
> Wenn $F \Leftrightarrow G$ und F als Teilformel in H vorkommt, dann ist $H \Leftrightarrow H[F/G]$
> $\neg \forall (F) \Leftrightarrow \exists x (\neg F)$
> $\neg \exists (F) \Leftrightarrow \forall x (\neg F)$
> $(\forall x (F)) \wedge G \Leftrightarrow \forall x (F \wedge G)$ falls x in G nicht frei vorkommt
> $(\forall x (F)) \vee G \Leftrightarrow \forall x (F \vee G)$ falls x in G nicht frei vorkommt
> $(\exists x (F)) \wedge G \Leftrightarrow \exists x (F \wedge G)$ falls x in G nicht frei vorkommt
> $(\exists x (F)) \vee G \Leftrightarrow \exists x (F \vee G)$ falls x in G nicht frei vorkommt
> $(\forall x (F)) \wedge (\forall y (G)) \Leftrightarrow \forall x (F \wedge G[y/x])$, falls x in G nicht frei vorkommt
> $(\exists x (F)) \vee (\exists y (G)) \Leftrightarrow \exists x (F \vee G[y/x])$, falls x in G nicht frei vorkommt
> $\forall x (\forall y (F)) \Leftrightarrow \forall y (\forall x (F))$
> $\exists x (\exists y (F)) \Leftrightarrow \exists y (\exists x (F))$
> $\forall x (F) \Rightarrow F[x/a]$ für alle Konstanten a
> $((\forall x (F)) \wedge (F \Rightarrow G)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x (G))$

Achtung: Es gelten jedoch *nicht*
$\exists x (\forall y (F)) \Leftrightarrow \forall y (\exists x (F))$
$(\forall x (F)) \vee (\forall y (G)) \Leftrightarrow \forall x (F \vee G[y/x])$
$(\exists x (F)) \wedge (\exists y (G)) \Leftrightarrow \exists x (F \wedge G[y/x])$

Beispiel:

Folgende Zusammenhänge seien wahr:

i) Informatikstudenten können programmieren.
ii) Studenten mit guten Mathematiknoten studieren Informatik.
iii) Studenten, die mit einem Informatiker (jemandem, der Informatik studiert) verwandt sind, haben gute Mathematiknoten.
iv) Alle saarländischen Studenten sind mit Heinz Becker verwandt.
v) Die Verwandtschaftsbeziehung ist symmetrisch.
vi) Heinz Becker hat Informatik studiert.

Modellierung:

Universum: Menge aller Studenten
Prädikate:
KannProgrammieren P(x)
StudiertInformatik I(x)
HatGuteMathenoten M(x)
SindVerwandt V(x,y)
IstSaarländer S(x)
Funktionen und Konstanten:
HeinzBecker hb()
Formeln:

i) $\forall x \; (I(x) \Rightarrow P(x)) \wedge$
ii) $\forall x \; (M(x) \Rightarrow I(x)) \wedge$
iii) $\forall x \; \forall y \; ((V(x,y) \wedge I(y)) \Rightarrow M(x)) \wedge$
iv) $\forall x \; (S(x) \Rightarrow V(x,hb)) \wedge$
v) $\forall x \; \forall y \; ((V(x,y) \Leftrightarrow V(y,x)) \wedge$
vi) $I(hb)$

Vereinfachung, sprich Deduktion:

(iii) $\wedge$ (iv) $\wedge$ (vi):
$\forall x \; \forall y \; (I(hb) \wedge (S(x) \Rightarrow V(x,hb)) \wedge (V(x,y) \wedge I(y)) \Rightarrow M(x)))$
$\vdash \; \forall x \; (I(hb) \wedge (S(x) \Rightarrow V(x,hb)) \wedge (V(x,hb) \wedge I(hb)) \Rightarrow M(x)))$
$\vdash \; \forall x \; (S(x) \Rightarrow M(x))$ (*)
(*) $\wedge$ (ii) $\wedge$ (i):
$\forall x \; ((S(x) \Rightarrow M(x)) \wedge (M(x) \Rightarrow I(x)) \wedge (I(x) \Rightarrow P(x)))$
$\vdash \; \forall x \; (S(x) \Rightarrow P(x))$
Fazit: alle Saarländer können programmieren!

Ergänzende Literatur zu Kapitel 3

Uwe Schöning: Logik für Informatiker, Spektrum Akademischer Verlag, 1995