

Beispiel:

$$u \in \{a, b\}^*$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 \dots u_n \\ u^R &= u_n \dots u_1 \end{aligned}$$

$$u\$u^R\$$$

derz. Zustand	EK	AK	neuer Zustand	EK	AK
0 (Anfangszustand)	a	Z	1	→	uparrow A
0	b	Z	1	→	uparrow B
0	\$	Z	3	→	-
1	a	A	1	→	uparrow A
1	a	B	1	→	uparrow A
1	b	A	1	→	uparrow B
1	b	B	1	→	uparrow B
1	\$	A	2	→	A
1	\$	B	2	→	B
2	a	A	2	→	downarrow
2	b	B	2	→	downarrow
2	\$	Z	3 (Endzustand)	→	downarrow

3. Turing Maschine

TODO: Bild einfügen

Anfangskonfiguration: Startzustand, Eingabekopf ganz links

Endkonfiguration: Maschine im Endzustand

Regeln:

Wenn Zustand = q , Eingabekopf liest a , Arbeitskopf liest A , dann neuen Zustand q' , Eingabekopf $\rightarrow, \cdot$, Arbeitskopf $A', \leftarrow, \cdot, \rightarrow$

Beispiel: $u \in \{a, b\}^*$

$$u\$u^R\$u\$$$

DEA	det. endlicher Automat
NEA	nichtdet. endlicher Automat
DKA	det. Keller Automat
NKA	nichtdet. Keller Automat
DTM	det. Turing Maschine
NTM	nichtdet. Turing Maschine

Def.:

Eine Sprache L ist eine DEA Sprache, wenn es einen DEA gibt, der L akzeptiert.
NEA-Sprache, ..., NTM-Sprache analog definiert.

Lemma:

Jede DEA-Sprache ist eine NEA-Sprache.

Jede DKA-Sprache ist eine NKA-Sprache.

Jede DTM-Sprache ist eine NTM-Sprache.

Lemma:

Jede DEA-Sprache ist eine DKA-Sprache.

Jede NEA-Sprache ist eine NKA-Sprache.

Jede DKA-Sprache ist eine DTM-Sprache.

Jede NKA-Sprache ist eine NTM-Sprache.

TODO: Bild einfügen

Fragen:

1. Welche Inklusionen sind strikt?
2. Gegeben ein NKA. Gibt es einen DEA, der genau die gleiche Sprache akzeptiert?
3. Gegeben zwei Maschinen: akzeptieren sie die gleiche Sprache?

Mengenlehre

$f : A \rightarrow B$ Funktion

Injektion: $\forall a, b \in A : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Surjektion: $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

Bijektion: Surjektion und Injektion (eindeutige Zuordnung)

Def.:

A und B heißen gleich mächtig, wenn es eine Bijektion zwischen A und B gibt.

Bsp.:

G nicht neg. geraden Zahlen $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\mathbb{N}$ und G sind gleichmächtig.

Bew.: $f(x) = 2x$ ist Bijektion!

Def.:

A heißt endlich, wenn $\exists k \in \mathbb{N}$ sodass A gleichmächtig wie $\{0, \dots, k-1\}$.

$$A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$$

A heißt abzählbar, wenn A endlich oder A gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.

Lemma:

$A_1, A_2, \dots, A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$.

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ ist endlich.

- $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ ist endlich.
- A_1^k ist endlich.

Lemma:

$A_0, A_1, \dots$ sei unendliche Folge von disjunkten endlichen Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

abzählbar (unendlich).

Lemma:

Wenn A, B abzählbar unendlich $\Rightarrow A \times B$ abzählbar unendlich.

Bew.: $\mathbb{N}; \mathbb{N}$

	0	1	2	3	4
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$$c_i = \{(a_j, b_k) | j + k = i\}$$

$$A \times B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_i$$

c_i disjunkt, $|c_i| = i + 1$

Lemma:

Sei A abzählbar unendlich.

$$2^A = \{B | B \subset A\}$$

2^A ist NICHT abzählbar.

Bew.: $A = \{a_0, a_1, \dots\}$

$B \subset A$ kann mit „unendlicher“ Bitfolge s_B identifiziert werden.

$$s_b(i) = \begin{cases} 1 & a_i \in B \\ 0 & a_i \notin B \end{cases}$$

$B = \{1, 3, 7\}$: 010100010...

$B = \{1, 3, 5, 7\}$: 010101010101...

2^A ist nicht abzählbar, d.h. $f: \mathbb{N} \rightarrow 2^A \Rightarrow f$ ist keine Bijektion (z.b. weil f keine Surjektion).

$$f(0) = B_0 \quad : \quad s_{B_0} = 0110011...$$

$$f(1) = B_1 \quad : \quad s_{B_1} = 11100010...1$$

Möchte zeigen: $\exists B \subset A$ sodass $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq B$

$\Leftrightarrow$ suche Bitfolge, die in Auflistung nicht vorkommt, sich also von jedem s_{B_i} unterscheidet.

$$s_B(i) = 1 - s_{B_i}(i)$$

s_B unterscheidet sich von jedem s_{B_i} (an Stelle i)

$\Rightarrow$ Cantor'sche Diagonalisierungsverfahren.