



Aufgabe 1

Behauptung: $A \leq B$ und $B \leq C \Rightarrow A \leq C$, d.h. Relation ' $\leq$ ' ist transitiv.

Beweis: Seien die Sprachen $A \subset \Sigma^*$, $B \subset \Gamma^*$, $C \subset P^*$ gegeben mit $A \leq B$ und $B \leq C$. Dann existieren total Turing berechenbare Funktionen: $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ und $g : \Gamma^* \rightarrow P^*$ mit den Eigenschaften $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ und $y \in B \Leftrightarrow g(y) \in C$. Wir definieren eine Funktion $h = f \circ g : \Sigma^* \rightarrow P$. Sie ist total Turing berechenbar. Werden f und g durch TM M und M' berechnet, dann wird $f \circ g$ durch die Maschine berechnet, die bei jeder Eingabe zunächst M simuliert, bis diese in einen Haltezustand gelangt, und auf dem so erzeugten Zwischenergebnis wie M' fortführt.

Nach obiger Beobachtung gilt: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow g(f(x)) = h(x) \in C$. Damit ist A also reduzierbar auf C , $A \leq C$, die Relation ist transitiv.

Aufgabe 2

Wir wissen (von vorherigen Blättern und aus der Vorlesung):

- Deterministisch kontextfreie Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen.
- Kontextfreie Sprachen allgemein sind weder unter Schnitt noch unter Komplementbildung abgeschlossen.
- Die Vereinigung zweier kontextfreier Sprachen ist wieder kontextfrei.
- Es ist nicht entscheidbar, ob der Schnitt zweier kontextfreier Sprachen kontextfrei ist.

Wir wollen nun zeigen, daß es nicht entscheidbar ist, ob das Komplement einer kontextfreien Sprache wieder kontextfrei ist. Dazu betrachten wir 2 deterministisch kontextfreie Sprachen L_1 und L_2 . Da es sich um DKA-Sprachen handelt, sind ihre Komplementärsprachen wieder DKA-Sprachen: $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ sind deterministisch kontextfrei. Die Vereinigung $L_3 := \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$ ist zwar immer noch kontextfrei, jedoch nicht mehr notwendigerweise deterministisch kontextfrei. Für den allgemeinen Fall müssen wir nun also annehmen, daß diese Sprache nichtdeterministisch kontextfrei ist. Nun zum eigentlichen Beweis: Angenommen es wäre entscheidbar, ob $\overline{L_3}$ ebenfalls kontextfrei wäre. Dann wäre entscheidbar ob $\overline{L_3} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = L_1 \cap L_2$ wieder kontextfrei ist. Dies steht im Widerspruch zum Satz aus der Vorlesung. Also ist dieses Problem nicht entscheidbar!

Aufgabe 3

- a) (k, X, Y) mit $X, Y \in (\Sigma^*)^k$ und $|\Sigma| = 1$



Sei (x_i, y_i) für $i = 1, \dots, n$ eine Instanz des PCP_a . Die Frage, ob es eine Indexfolge $(i_1, \dots, i_k)$ mit $k \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = y_{i_1}, \dots, y_{i_k}$ gibt, ist äquivalent zu der Frage, ob es eine Indexfolge $(i_1, \dots, i_k)$ mit

$$\begin{aligned} |x_{i_1} \dots x_{i_k}| &= |y_{i_1} \dots y_{i_k}| \\ &= |x_{i_1}| + \dots + |x_{i_k}| \\ &= |y_{i_1}| + \dots + |y_{i_k}| \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$PCP_a \text{ unlösbar} \Leftrightarrow \forall i : |x_i| < |y_i| \text{ oder } \forall i : |y_i| < |x_i|.$$

$\Rightarrow$: Sei PCP_a unlösbar. Falls es ein (x_i, x_j) mit $|x_i| = |x_j|$ gibt, dann besitzt PCP_a eine Lösung (Widerspruch zur Annahme). Es gelte deshalb nun $|x_i| \neq |y_i|$ für alle i . Wir nehmen an, dass es ein j und ein k existieren mit $|x_j| > |y_j|, |x_k| < |y_k|$. Betrachte

$$n_1 := |x_j| - |y_j|, n_2 := |y_k| - |x_k|$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} |x_j^{n_2} x_k^{n_1}| &= (n_1 + |y_j|) * n_2 + (|y_k| - n_2) * n_1 \\ &= n_2 * |y_j| + n_1 * |y_k| \\ &= |y_j^{n_2} y_k^{n_1}|. \end{aligned}$$

Es gilt jetzt, dass $j^{n_2} * k^{n_1}$ eine Lösung des PCP_a ist.

$\Leftarrow$: Sei jetzt $|x_i| < |y_i|$ für alle i . Dann gilt $\forall (i_1, \dots, i_k), k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |x_{i_1} \dots x_{i_k}| &= |x_{i_1}| + \dots + |x_{i_k}| \\ &< |y_{i_1}| + \dots + |y_{i_k}| \\ &= |y_{i_1} \dots y_{i_k}|. \end{aligned}$$

Also kann es keine nichttriviale Lösung geben.

Folgerung: Um PCP_a zu entscheiden, genügt es $|y_i| < |x_i|$ für alle i zu testen.

b) (k, X, Y) mit $X, Y \in (\Sigma^{\leq 2})^k$

Diese Einschränkung ist unentscheidbar. Wir gehen wie in der Vorlesung vor und reduzieren $WORT$ auf dieses PCP_b . Dazu müssen wir Sorge tragen, dass auf jeder Spielkarte oben und unten jeweils höchstens zwei Zeichen stehen. Als Eingabe für $WORT$ bekommen wir eine Grammatik G und ein Wort w . Wir modifizieren sowohl G als auch w .

1) Wir modifizieren bei der Grammatik die Regeln $\alpha \rightarrow \beta$ und wollen erreichen, dass $|\alpha| \leq 2$ und $|\beta| \leq 2$ gilt.



Betrachten wir zunächst den Fall $B \rightarrow \beta$, wobei $\beta = \beta_1\beta_2\cdots\beta_k$ sei, $\beta_i \in \Sigma \cup V$. Wir konstruieren eine rechtslineare Grammatik, die genau β ableitet. Sie habe Startsymbol B und Regeln $B \rightarrow \beta_1B_1, B_1 \rightarrow \beta_2B_2, \dots, B_{k-1} \rightarrow \beta_k$. Die verwendeten Nichtterminal-Symbole sollen in keiner anderen Formel vorkommen. Wir entfernen die Regel $B \rightarrow \beta$ und fügen obige Regeln und die neuen Nichtterminale zur Grammatik hinzu. Regeln der Form $\alpha \rightarrow A$ zerlegen wir genauso. Eine Regel der Form $\alpha \rightarrow \beta$ zerlegen wir in die beiden Fälle $\alpha \rightarrow A, A \rightarrow \beta$ und verfahren wie oben.

Weiterhin konstruieren wir eine rechtslineare Grammatik, die genau $w = a_1a_2\cdots a_n$ ableitet. Sie habe Startsymbol T und Regeln $T \rightarrow a_1T_1, T_1 \rightarrow a_2T_2, \dots, T_{n-1} \rightarrow a_nT_n$. Die verwendeten Nichtterminal-Symbole sollen in keiner anderen Formel vorkommen.

2) Wir konstruieren eine Instanz von PCP_b . Dabei gehen wir im Prinzip vor wie in der Vorlesung. Allerdings „verdoppeln“ wir jedes Zeichen der Grammatik: Für jedes Zeichen X , nehmen wir auch X' in unser Alphabet mit auf. Anstelle der Karte (w_o, w_u) nehmen wir die zwei Karten (w'_o, w_u) und (w_o, w'_u) in das Kartenspiel auf. (w'_o soll bedeuten, daß jedes Zeichen von w_o mit Apostroph versehen ist.) Dies stellt sicher, dass bis auf die erste Karte keine Karte oben und unten mit dem gleichen Zeichen beginnt. Falls es eine Lösung gibt, muß sie mit der ersten Karte beginnen.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \#\# & T \Leftarrow & A' & A & \dots & a' & a & \dots & \Leftarrow' & \Leftarrow & \alpha' & \alpha & \dots & \S & \S' \\ \# & \# & A & A' & \dots & a & a' & \dots & \Leftarrow & \Leftarrow' & \beta & \beta' & \dots & \Leftarrow' S' & \S\S' \end{array}$$

Wie in der Vorlesung gesehen, kann aus jeder Ableitung eine Lösung des PCP_b abgeleitet werden. (Eine Lösung des PCP_b besteht aus zwei Teilen: Rechts steht die Ableitung von w aus dem Startsymbol der Grammatik, der linke Teil produziert zunächst den String w .) Falls es eine Lösung von PCP_b gibt, dann kann man daraus auch eine Ableitung für w finden. Dies sollte genauer ausgeführt werden.

Hinweis: Im Grunde genommen, muß man ϵ -Regeln aus der Grammatik entfernen. Wir haben aus Gründen der Übersichtlichkeit darauf verzichtet.

c) (k, X, Y) mit $X, Y \in (\Sigma^{\leq 2})^k$ und $|\Sigma| = 8$

Es seien Σ_1 und Σ_2 zwei Alphabete mit jeweils 8 Zeichen und f eine bijektive Abbildung zwischen ihnen. Diese läßt sich in natürlicher Weise zu einer bijektiven Abbildung zwischen Instanzen bezüglich Σ_1 und Instanzen bezüglich Σ_2 fortsetzen. Lösungen der einen entsprechen dann eindeutig Lösungen der anderen. „Alle Alphabete sind äquivalent.“ Wir können uns also darauf beschränken, nur ein Alphabet zu betrachten.

Jedes X_i und Y_i hat Länge kleiner oder gleich zwei, d. h. auf jeder Spielkarte stehen oben und unten jeweils höchstens zwei Zeichen. Stehen oben zwei Zeichen, so sind 64 Fälle möglich, steht oben ein Zeichen, so weitere 8. Der Fall, dass dort ϵ steht ist ausgeschlossen. Insgesamt sind dies 72 Möglichkeiten. Gleiches gilt für unten. Es gibt also nur 72^2 – also endlich viele – Spielkarten.

Offensichtlich ist $k \leq 72^2$, keine Instanz kann mehr verschiedene Karten haben als es überhaupt Karten gibt. Weiterhin gibt es für ein gegebenes k nur endlich viele Instanzen



des *PCP* mit k Spielkarten, nämlich $\binom{72^2}{k}$ viele. Die Gesamtzahl der möglichen Instanzen ist die Summe dieser 72^2 Zahlen, was wiederum eine endliche Zahl ist. Genauer sind es $\sum_{k=0}^{72^2} \binom{72^2}{k} = 2^{72^2}$.

Wir haben festgestellt, dass die Menge der Instanzen für dieses eingeschränkte *PCP* endlich ist. In Aufgabe 1 g) des 9. Übungsblattes haben wir gezeigt, dass reguläre Sprachen entscheidbar sind. Jede endliche Menge ist regulär. Daher ist diese Einschränkung des *PCP* entscheidbar.

Aufgabe 4

Lösungen (einer Instanz) des *MPCP* und Ableitungen (eines Wortes) entsprechen sich nicht in eindeutiger Weise.

Es gibt Lösungen des *PCP*, die keiner Ableitung entsprechen. Betrachte dazu die Grammatik $G = (\{S\}, \{a\}, S, \{S \rightarrow a\})$. Es ist $L(G) = \{a\}$ und es existiert genau eine Ableitung für a . Dazu konstruieren wir (wie in der Vorlesung) eine Instanz des *MPCP* mit $k = 6$:

	1	2	3	4	5	6
X_i	$\#a \Leftarrow$	S	a	$\Leftarrow$	S	$\S$
Y_i	$\#$	S	a	$\Leftarrow$	a	$\Leftarrow S\S$

Wir betrachten zwei Lösungen des *MPCP*: Lösung 1 sei $I_1 = (1, 5, 6)$. Der konkatenierte String ist $\#a \Leftarrow S\S$. Dann ist auch $I'_1 = (1, 5, 6, 1, 5, 6)$ eine Lösung des *PCP*. Ihr entspricht aber keine Ableitung. Lösung 2 sei $I_2 = (1, 5, 4, 2, 6)$. Konkateniert ergibt sich $\#a \Leftarrow S \Leftarrow S\S$. Dieser Lösung entspricht auch keine Ableitung.