Theoretische Informatik (WS04)

Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding, Dierk Johannes
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1

Gilt die folgende Aussage? Wenn L eine DKA-Sprache und R eine reguläre Sprache ist, dann ist $L \cap R$ eine DKA-Sprache.

Wir zeigen im folgenden, daß $L \cap R$ eine DKA-Sprache ist. Gesucht ist also ein diese Sprache akzeptierender deterministischer Kellerautomat $M_{L \cap R}$.

Sei $M_L = (Z, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, \#, F)$ ein DKA zu L und $M_R = (Z', \Sigma, \Delta', s', F')$ ein DEA zu R.

Idee: Wir bauen aus M_L und M_R einen „Kreuzproduktautomaten" (vgl. ähnliche Konstruktion für endliche Automaten).

Wir definieren also einen DKA $M_{L \cap R}$ wie folgt:

$$M_{L \cap R} := \big((Z \times Z'), \Sigma, \Gamma, \Delta'', (s, s'), \#, (F \times F')\big)$$

mit

$$\big((z_1, z_2), a, A, B, (z_1', z_2')\big) \in \Delta'' \iff (z_1, a, A, B, z_1') \in \Delta \text{ und } (z_2, a, z_2') \in \Delta'$$

Wenn $M_{L \cap R}$ ein Wort akzeptiert, dann gibt es im Transitionsgraphen einen akzeptierenden Pfad von der Startkonfiguration mit Startzustand (s, s') zu einer Endkonfiguration mit Endzustand (f, f'). Dies ist nach Konstruktion genau dann der Fall, wenn es im Transitionsgraphen von M_L einen akzeptierenden Pfad von der Startkonfiguration mit Startzustand s zu einer Endkonfiguration mit Endzustand f und im Übergangsgraphen des endlichen Automaten einen akzeptierenden Pfad vom Startzustand s' zum Endzustand f' gibt. (Dies könnte genauer begründet werden.)

Es gilt: $M_{L \cap R}$ akzeptiert genau $L \cap R$.

Aufgabe 2

(a)

1. $S \to \varepsilon$
2. $S \to AB \to aSB \to aABB \to aaSBB \to aaBB \to aabSB \to aabB \to aabb$
3. $S \to BA \to bSA \to bABA \to baSBA \to baBABA \to babSABA \to babABA \to babaSBA \to babaBA \to bababSA \to bababA \to bababaS \to bababa$

(b)
Wir vermuten nach Bearbeiten des Teils a:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$$

Für den Beweis benötigen wir noch etwas Notation: $L_{ab} = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
$\#_a(w)$ ist Anzahl der a in w
$\#_b(w)$ ist Anzahl der b in w
$\#_A(w)$ ist Anzahl der A in w
$\#_B(w)$ ist Anzahl der B in w
$\#_a A(w) = \#_a(w) + \#_A(w)$
$\#_b B(w) = \#_b(w) + \#_B(w)$

1. $L(G) \subseteq L_{ab}$

   Wir zeigen: Für jedes erzeugte Wort w gilt $\#_a(w) = \#_b(w)$
   Beh.: $S \Rightarrow_G^* \alpha$, dann gilt $\#_{aA}(\alpha) = \#_{bB}(\alpha)$
   Damit: Ist $S \Rightarrow_G^* w$, dann ist $\#_A(w) = \#_B(w) = 0$, also $\#_a(w) = \#_b(w)$.

   Die Behauptung beweisen wir mittels vollständiger Induktion über die Länge der Ableitung:

   - $n = 0$: Einzige mögliche Ableitung: $\alpha = S$
     $\#_a(S) = \#_b(S) = \#_A(S) = \#_B(S)\checkmark$

   - $n - 1 \to n$: Die Behauptung gelte für alle Ableitungen mit $n - 1$ Schritten.
     Wir haben die Situation:
     $$S \Rightarrow_G^{n-1} w' \Rightarrow_G w$$
     Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $\#_{aA}(w') = \#_{bB}(w')$.
     Prinzipiell könnte jede Regel angewendet werden um w aus w' zu erzeugen. Wir zeigen, daß nach Anwendung jeder Regel $\#_{aA}(w) = \#_{bB}(w)$ gilt. Hier werden nur einige Beispiele aufgeführt, die anderen Regeln ergeben sich analog:

$S \to \varepsilon$	Bei der Ersetzung sind keine a, b, A, B beteiligt, also gilt nach einmaligem Anwenden: $\#_a A(w) = \#_a A(w')$, $\#_b B(w) = \#_b B(w')$ $\overset{I.V.}{\Rightarrow} \#_a A(w) = \#_b B(w)$
$S \to AB$	$\#_{aA}(w) = \#_{aA}(w') + 1$, $\#_{bB}(w) = \#_{bB}(w') + 1 \Rightarrow \#_a A(w) = \#_b B(w)$
$S \to BA$	analog zu obigem Fall
$A \to aS$	$\#_A(w) = \#_A(w') - 1$, $\#_a(w) = \#_a(w') + 1 \Rightarrow \#_{aA}(w) = \#_{bB}(w)$
$\vdots$	$\vdots$

     Damit ist gezeigt, daß einmaliges Regelanwenden die Behauptung erhält.

2. $L(G) \supseteq L_{ab}$

   Wir zeigen: Jedes Wort w mit $\#_a(w) = \#_b(w)$ läßt sich mit G erzeugen.
   Dies zeigen wir mittels vollständiger Induktion:

$\mid w \mid= 0$: Einzige Möglichkeit ist $w = \varepsilon$. Da $S \to \varepsilon$ existiert, kann ε erzeugt werden.

- $\mid w \mid= 2$: $w = ab$ oder $w = ba$, kann erzeugt werden mittels:
  $S \Rightarrow AB \Rightarrow aSB \Rightarrow aB \Rightarrow abS \Rightarrow ab$
  $S \Rightarrow BA \Rightarrow bSA \Rightarrow bA \Rightarrow baS \Rightarrow ba\surd$
- $\mid w \mid= n > 2$:
  Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle $w^{'} \in L_{ab}$ mit $\mid w^{'} \mid< n$.
  O.B.d.A. fange w mit a an. (Der andere Fall ist analog.)
  Beh.(*): Es existiert eine Zerlegung $w = aw_1bw_2$ mit $w_1, w_2 \in L_{ab}$.
  Damit: $\mid w_1 \mid\leq n-2$, $\mid w_2 \mid\leq n-2$, also lassen sich nach Induktionsvoraussetzung w_1 und w_2 aus S erzeugen:
  $S \Rightarrow AB \Rightarrow aSB \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* aw_1bw_2$

Dazu muss nun nur noch die Behauptung (*) bewiesen werden: Definiere Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit: $f(i) = \#_a(w_1w_2\ldots w_i) - \#_b(w_1w_2\ldots w_i)$ mit $w = w_1w_2\ldots w_n$.

Es ist $f(1) = 1$, $f(n) = 0$ und je zwei benachbarte Funktionswerte unterscheiden sich um jeweils 1. Es sei j die kleinste Zahl mit $f(j) = 0$. Sie existiert, da $f(n) = 0$ ist. Dann gilt $f(j-1) = 1$, sonst gäbe es einen Widerspruch zur Annahme der Minimalität von j. Die Bedingung $f(j-1) = 1$ und $f(j) = 0$ bedeutet, daß $w_j = b$ ist; wir befinden uns also in folgender Situation:

$$w = a \underbrace{w_2w_3\ldots w_{j-1}}_{w^{'}} \; b \; \underbrace{w_{j+1}\ldots w_n}_{w^{''}}$$

mit $\#_a(aw^{'}b) = \#_b(aw^{'}b) \Rightarrow \#_a(w^{'}) = \#_b(w^{'})$ und $\#_a(w^{''}) = \#a_b(w^{''})$.
Damit ist die gewünschte Zerlegung gefunden.