Theoretische Informatik (WS04)
Prof. Dr. Raimund Seidel
Wei Ding, Dierk Johannes
Lösungsvorschlag zu Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1

a) L_a ist nicht regulär, aber kontextfrei.

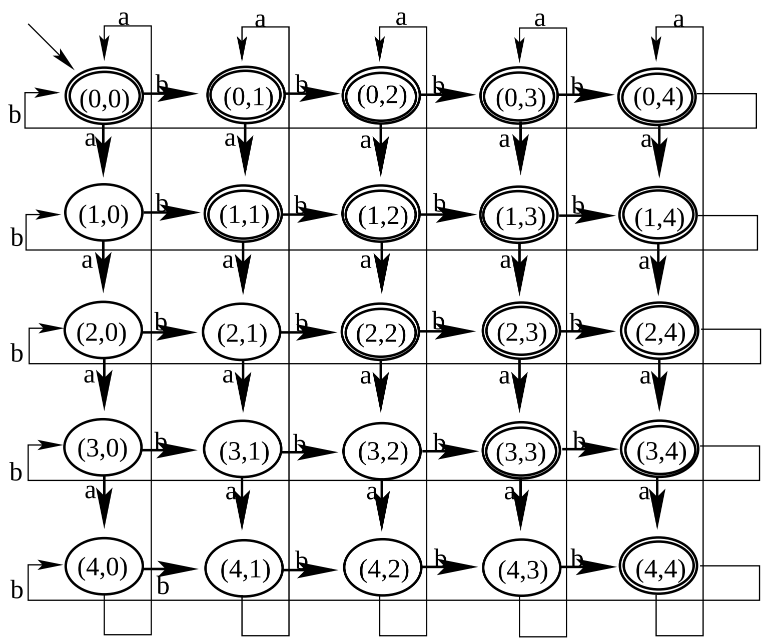
1. Die Sprache L_a ist nicht regulär.
Beweis durch Pumping Lemma.
Sei L_a regulär. Dann gibt es eine Zahl n, so daß alle Wörter $x \in L_a$ mit der Länge $\geq n$ sich zergelen lassen, wie in Pumping Lemma beschrieben ist. Betrachten wir speziell das Wort $a^{2n}b^n$ mit der Länge $3n$. Die entsprechende Zerlegung uvw dieses Wortes ist aufgrund der Bedingung $|v| \geq 1$ so, daß v nicht leer ist. Und aufgrund der Bedingung $|uv| \geq n$ kann v nur aus a's bestehen. Aufgrund der Bedingung $\forall i \in N : uv^iw \in L_a$ wäre dann auch das Wort $uw = a^{2n-|v|}b^n$ in der Sprache, was im Widerspruch zur Definition von L_a steht. Daher ist L_a nicht regulär.

2. L_a ist eine kontexfreie Sprache.
Beweis: Durch Konstruktion eines M KA.
$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, S, F\}$
$\Delta = \{a, b\}$
$Q = \{s, g, f\}$
$F = \{f\}$
$\Gamma = \{a, b, \#, \$\}$
$\Delta = \{((s, \epsilon, \epsilon), (g, \#))$
$((g, a, \#), (g, a\#)),$
$((g, b, \#), (g, b\#)),$
$((g, a, a), (g, aa)),$
$((g, a, b), (g, \$)),$
$((g, a, \$), (g, \epsilon)),$
$((g, b, a), (g, \$)),$
$((g, b, aa), (g, \epsilon)),$
$((g, b, \$), (g, b\$)),$
$((g, \epsilon, \#), (f, \epsilon)),$
$((g, b, b), (g, bb)),$
$((g, a, b\$), (g, \$)),$
$((g, \epsilon, a), (g, \epsilon))\}$

Idee: M markiert im Startzustand den Boden des Kellers mit einem spezielen Symbol #
1. Im Zustand g vergleichen wir #a's und #b's
2. a) M akzeptiert leeres Wort ϵ
b) M akzeptiert alle Wörter mit $\#a's = 2\#b's$
c) Wenn $\#a's > 2\#b's$, und Eingabeband ist leer, und Keller ist leer, dann geht M in Endzustand.
3. Wenn Eingabeband leer ist, und Keller nicht leer (b's Zeichen im Keller), dann akzeptiert M dieses Wort nicht und bleibt in endloser Schleife.

b) Die Sprache ist regulär. Wir konstruieren einen Automat. Idee: Zustände sind Paare (i,j) mit $i,j \in \{0,1,2,3,4\}$. Der Zustand protokolliert die Anzahl der gelesenen a's modulo 5 in der ersten Komponente und die Anzahl der gelesenen b's modulo 5 in der zweiten. Übergänge von Zustand (i,j): Mit a nach $((i+1) \mod 5, j)$, mit b nach $(i,(j+1) \mod 5)$. Beispiel: Von $(3,4)$ kommen wir mit a nach $(4,4)$, mit b nach $(3,0)$. Startzustand ist $(0,0)$, Endzustand ist jedes (i,j) mit $i \le j$.

Genauer: Wir können einen DEA für diese Sprache angeben, der wie folgt spezifiziert ist:
DEA M= $\langle \Sigma, Q, s, F, \Delta \rangle$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$Q = \{(i,j) | 0 \le i \le 4, 0 \le j \le 4\}$
$s = (0,0)$
$F = \{(i,j) | i \le j\}$
$\Delta((i,j),a) = (i+1,j)$ für $0 \le i < 4, \forall j$
$\Delta((i,j),b) = (i,j+1)$ für $0 \le j < 4, \forall i$
$\Delta((i,j),a) = (0,j)$ für $i = 4, \forall j$
$\Delta((i,j),b) = (i,0)$ für $j = 4, \forall i$
Jeder Zustand protokoliert die Anzahl der gelesenen a's modulo 5 in der ersten Komponente und die Anzahl der gelesenen b's modulo 5 in der zweiten.



c) L_c ist nicht-NKA. Wir benutzen das Pumpinglemma für NKA-Sprachen, d. h. wir zeigen: für alle N existiert ein Wort z, $|z| > N$, so daß für alle Zerlegungen $z = uvwxy$ mit $|vx| \ge 1$, $|vwx| \le N$ ein i existiert mit $uv^iwx^iy \notin L_c$.

Für gegebenes N betrachten wir das Wort $z = a^{(2N+1)!}\, b^{N+1}$. Es sei $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung. Wir betrachten nur den Fall $v = a^c$, $x = b^d$, $c + d \le N$. Alle anderen Fälle führen schnell zu der gewünschten Aussage. (Dies ist vorzuführen.)

Es ist $uv^iwx^iy = a^{(2N+1)!-c+ic}\ b^{N+1-d+id}$ mit $c + d \leq N$, oder wenn wir $j = i - 1$ setzen: $a^{(2N+1)!+jc}\ b^{N+1+jd}$. Die Bedingung $\#_a(w) \mod \#_b(w) = 0$ bedeutet, daß die Anzahl der b's ein Teiler der Anzahl der a's ist. Wir müssen also zeigen, daß $\frac{(2N+1)!+jc}{N+1+jd}$ nicht für jedes j eine ganze Zahl ist. Wir wählen $j = 1$ und betrachten $\frac{(2N+1)!+c}{N+1+d}$. Da $d \leq N$ gilt, ist offensichtlich $N + 1 + d$ ein Teiler von $(2N + 1)!$. Weiterhin ist $c \leq N < N + 1 + d$, d. h. $N + 1 + d$ ist kein Teiler von c. Also ist $\frac{(2N+1)!+c}{N+1+d}$ nicht ganzzahlig.

Aufgabe 2

Anschaulich gesprochen heisst eine Funktion streng konvex, wenn die Verbindungsgerade zweier Punkte der Funktion, oberhalb der Funktion liegt. Beispiele fuer solche Funktionen sind: x^2, a^x, ...

Wir betrachten Funktionen $f : N \to \mathbb{N}$, d. h. wir betrachten ganzzahlige Paare auf solchen streng konvexen Funktionen. Bemerkung: Genauer gesagt muessen wir hier sogar Paare betrachten bei denen folgendes gilt: $f(\frac{x+y}{2}) \in N$ bzw. $\frac{(f(x)+f(y))}{2} \in N$.

Wir nutzen das Pumpinglemma, um die Aussage zu zeigen. D. h. fuer alle N und fuer alle Zerlegungen $uvwxy$ existiert ein i mit $uv^iwx^iy \notin L$.

Dazu betrachten wir eine beliebige Zerlegung $uvwxyz$ des Wortes $a^nb^{f(n)}$. Liegen die v's bzw. x's sowohl im a als auch im b Block, so verlassen wir beim Aufpumpen die Sprache. Das gleiche gilt fuer diejenigen Zerlegungen bei denen nur a's bzw. b's aufgepumpt werden (also eines der beiden ϵ ist. Also ist der einzig interressante Fall welcher betrachtet werden muss derjenige bei denen v nur aus a's und x nur aus b's besteht.

Es sei also $v = a^c$ und $x = b^d$. Nach dem Pumpen besteht v^i aus a^{ic} und x^i aus b^{id}. Damit ist $uv^iwx^iy = a^{N-c+ic}b^{f(N)-d+id}$. Mit $j = i-1$ vereinfacht sich dies zu $a^{N+jc}b^{N+jd}$. Wir waehlen nun $j = 1$ und $j = 3$ und vergleichen die Funktionswerte.

Das aufgepumpte Wort sieht also fuer $j = 1$ folgendermassen aus: $a^{n+1*c}b^{f(n)+1*d}$ Fuer $j = 3$ dementsprechend $a^{n+3*c}b^{f(n)+3*d}$.

Wir setzen nun die beides (fuer x und y) in unsere Ungleichung ein und erhalten:

$$\frac{f(n+1c)+f(n+3c)}{2} = \frac{f(n)+1d+f(n)+3d}{2} = \frac{2f(n)+4d}{2}$$
$$= f(n)+2d = f(n+2c) = f\left(\frac{2n+4c}{2}\right) = f\left(\frac{n+c+n+3c}{2}\right)$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Bedingung der strengen Konvexitaet.

Aufgabe 3

Das Argument aus Aufgabe 2 läßt sich zum Beispiel auch für streng konkave Funktionen verwenden.

Im Beweis haben wir nur gebraucht, daß es unendlich viele Zahlen x und y gibt mit $x + y$ gerade und $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \neq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ gibt.

Was sind umgekehrt Funktionen, für die für alle x und y die Aussage $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ gilt. Dies sind Geraden. (Beweis ?)

D. h. für uns, daß die betrachtete Funktion (aufgefaßt als Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) nicht für unendlich viele ganzzahlige Argumente mit einer Geraden übereinstimmen darf. Aber sie darf z. B. endlich viele Werte mit jeder Geraden gemeinsam haben.

(Etwas genauer müßte man sagen, nicht unendlich viele ganzzahlige x, y mit $x+y$ gerade. Dies ist aber der Fall, wenn beide Summanden gerade oder beide ungerade sind. Also eigentlich: nicht unendlich viele gerade und nicht unendlich viele ungerade x, y, das heißt aber nichts anderes als: nicht unendlich viele.)

Aufgabe 4

a) $M = (\Sigma, G, s, F, \Delta)$
$s \in G$, $F \subseteq G$, $\Delta \subseteq G \times \Sigma \times \Sigma \times G \times \{\diamond, \rightarrow\} \times \{\diamond, \rightarrow\}$
Im Vergleich zum Dea ändert sich nur Δ: Es werden nun 2 Zeichen gelesen und für beide Leseköpfe wird unabhängig festgelegt, ob sie sich weiterbewegen ($\rightarrow$) oder verharren ($\diamond$). $(A, x, y, B, \diamond, \rightarrow) \in \Delta$ bedeutet also, daß der Automat, wenn er sich in Zustand A befindet, der erste Lesekopf x liest und der zweite Lesekopf y liest, in Zustand B übergeht, wobei der erste Lesekopf stehen bleibt, der zweite jedoch weiterrückt.

b) Ein Wort wird akzeptiert, wenn eine Folge von Übergängen existiert, nach der beide Leseköpfe am Ende des Wortes stehen und der Automat sich in einem Endzustand befindet.

c) Der Automat fällt im Vergleich zu anderen sprachentheoretischen Konstrukten etwas aus der Reihe: Offensichtlich lassen sich alle regulären Sprachen durch einen solchen Automaten entscheiden, da man mit dieser Spracklasse endliche Automaten simulieren kann, indem man folgende Einschränkungen trifft: $\forall (A, x, y, B, d_1, d_2) \in \Delta : d_1 = d_2 = \rightarrow$
Dadurch ergibt sich implizit, daß immer $x = y$ gilt. Auf diesem Weg lassen sich beliebige endliche Automaten konstruieren.
Die Klasse der 2-Kopf-Automaten kann jedoch mehr:
Der Automat $M = (\Sigma, G, s, F, \Delta)$ mit
$\Sigma = \{a, b\}$
$G = \{A\}$
$s = A$

$F = G = \{A\}$
$\Delta = \{(A, a, b, A, \rightarrow, \rightarrow), (A, \epsilon, a, A, \diamond, \rightarrow), (A, b, \epsilon, A, \rightarrow, \diamond), (A, b, a, A, \rightarrow, \rightarrow)\}$
entscheidet genau die Sprache $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$, die bekannterweise nicht regulär, sondern deterministisch kontextfrei ist. (Der erste Lesekopf darf jederzeit ein b überspringen, der zweite ein a, umgekehrt jedoch nicht: Kopf 1 darf genau dann ein a überspringen, wenn Kopf 2 auch ein b überspringt. Somit ist die Zahl der $a's$, die Kopf 1 gelesen hat zu jedem Zeitpunkt gleich der Anzahl der $b's$, die Kopf 2 gelesen hat.)
Es lässt sich auch ein solcher Automat bauen, der $a^n b^n c^n d^*$ entscheidet, also eine kontextsensitive, nicht kontextfreie Sprache: $M = (\Sigma, G, s, F, \Delta)$ mit
$\Sigma = \{a, b, c, d\}$
$G = \{A, B, C, D\}$
$s = A$
$F = \{D\}$
$\Delta = \{(A, a, a, A, \diamond, \rightarrow), (A, d, d, D, \rightarrow, \rightarrow), (A, a, b, B, \rightarrow, \rightarrow), (B, a, b, B, \rightarrow, \rightarrow), (B, b, c, C, \rightarrow, \rightarrow), (C, b, c, C, \rightarrow, \rightarrow), (C, c, d, D, \rightarrow, \diamond), (D, c, d, D, \rightarrow, \diamond), (D, d, d, D, \rightarrow, \rightarrow)\}$
Es gibt jedoch keinen solchen Automaten, der die NKA-Sprache ww^R, also die Sprache aller Palindrome über Σ entscheidet, sofern $|\Sigma| > 1$ gilt. Ebenso sind nicht alle nicht-kontextfreien Sprachen entscheidbar, z.B. $ww^R ww^R$
Diese Automatenklasse lässt sich also nicht in die Chomsky-Hierarchie einordnen.