



## Aufgabe 1

1. Es ist zu zeigen, daß der Begriff der Abzählbarkeit einer Menge  $M$ , so wie er in der Vorlesung definiert wurde, eine äquivalente Charakterisierung der Begriffe nummerierbar und aufzählbar ist.

- Abzählbarkeit: entweder ist  $M$  endlich oder  $\exists$  bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ , d.h. es existiert auch eine bijektive Abbildung  $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow M$
- Nummerierbarkeit:  $\exists$  surjektive Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ , d.h.  $\forall m \in M \exists x \in \mathbb{N}$  mit  $g(x) = m$
- Aufzählbarkeit:  $\exists$  injektive Abbildung  $h : M \rightarrow \mathbb{N}$ , d.h. für  $x, y \in M$  mit  $x \neq y$  gilt  $h(x) \neq h(y)$

Bevor wir die Äquivalenz der Begriffe Abzählbarkeit, Nummerierbarkeit und Aufzählbarkeit zeigen, geben wir eine wichtige Eigenschaft der Teilmengen von  $\mathbb{N}$  an:

Jede Teilmenge  $T \subset \mathbb{N}$  ist abzählbar! Dies ist sehr einfach einsehbar: Entweder ist  $T$  eine endliche Menge, dann sind wir fertig. Oder aber  $T$  ist nicht endlich. Weil  $T$  eine Teilmenge der natürlichen Zahlen ist, kann man die Elemente der Größe nach geordnet hinschreiben:  $i_1, i_2, i_3, i_4, \dots, i_j, \dots$ . Damit ist die Abbildung  $f : T \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(i_j) = j$  eine Bijektion.

Zu zeigen ist nun :

- **$M$  abzählbar  $\Rightarrow M$  aufzählbar**

$M$  ist abzählbar, d.h.  $M$  ist endlich oder  $\exists$  bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn  $M$  endlich ist, dann kann man jedem Element von  $M$  genau eine Zahl  $i$  mit  $1 \leq i \leq |M|$  zuweisen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung  $h : M \rightarrow \{1, \dots, |M|\}$ . Fasst man  $h$  nun als Abbildung von  $M$  nach  $\mathbb{N}$  auf, so ist  $h$  immer noch injektiv. Wenn  $M$  nicht endlich ist, dann gibt es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $f$  injektiv ist.

- **$M$  aufzählbar  $\Rightarrow M$  abzählbar**

$M$  aufzählbar, d.h.  $\exists$  injektive Abbildung  $h : M \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn  $M$  endlich ist dann ist es klar, dass  $M$  auch abzählbar ist. Andernfalls muss man zeigen, dass es eine bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow T$  mit  $T \subset \mathbb{N}$  gibt. Dazu schränken wir jetzt die Zielmenge  $\mathbb{N}$  folgendermaßen ein:

$$T := \{h(x) \in \mathbb{N} \mid x \in M\}.$$

Betrachtet man nun die Abbildung  $f : M \rightarrow T$  mit  $f(m) = h(m)$  für alle  $m \in M$  so ist  $f$  wohl definiert. Weil  $h$  injektiv war ist auch  $f$  injektiv und aufgrund der Konstruktion von  $T$  ist  $f$  auch surjektiv.

$\Rightarrow$  Abbildung  $f : M \rightarrow T$  ist bijektiv.  $\Rightarrow M$  ist **abzählbar**.



- **$M$  abzählbar  $\Rightarrow M$  nummerierbar**

$M$  ist abzählbar, d.h.  $M$  ist endlich oder  $\exists$  bijektive Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ . Wenn  $M$  endlich ist, dann kann man jedem Element von  $M$  genau eine Zahl  $i$  mit  $1 \leq i \leq |M|$  zuweisen, d.h. es gibt eine bijektive Abbildung  $g : \{1, \dots, |M|\} \rightarrow M$ . Erweitert man  $g$  nun auf eine Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ , indem man die Elemente  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n > |M|$  auf ein beliebiges Element  $m \in M$  abbildet, so ist  $g$  immer noch surjektiv. Wenn  $M$  nicht endlich ist, dann gibt es eine bijektive Abbildung  $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow M$ . Daraus folgt insbesondere, dass  $f^{-1}$  surjektiv ist.

- **$M$  ist nummerierbar  $\Rightarrow M$  abzählbar**

$M$  nummerierbar, d.h.  $\exists$  surjektive Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow M$ . Wenn  $M$  endlich ist dann ist es klar, dass  $M$  auch abzählbar ist. Andernfalls muss man zeigen, dass es eine bijektive Abbildung  $f : T \rightarrow M$  mit  $T \subset \mathbb{N}$  gibt. Dazu betrachten wir die Funktion  $k : M \rightarrow \mathbb{N}$ , die definiert ist durch

$$k(m) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid g(n) = m\}$$

und definieren

$$T = \{k(m) \mid m \in M\}.$$

Die Funktion  $f : T \rightarrow M$  mit  $f(t) = g(t)$  ist nun nach Konstruktion bijektiv.  $\Rightarrow$   **$M$  ist abzählbar.**

2. Es ist zu zeigen, daß die Menge  $\mathbb{Q}$  der rationalen Zahlen abzählbar ist. Es gilt :  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ . Im folgenden wird gezeigt, daß  $\mathbb{Q}^+$  abzählbar ist.  $\mathbb{Q}^-$  lässt sich analog beweisen und die Menge  $\{0\}$  als einelementige Menge ist schon abzählbar. Da wir wissen, dass die Vereinigung von drei abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist, sind wir damit dann fertig.

Die einfachste Weise zu zeigen, daß  $\mathbb{Q}^+$  abzählbar ist, ist alle Elemente von  $\mathbb{Q}^+$  aufzuzählen. Das Problem dabei ist zu gewährleisten, daß jedes Element von  $\mathbb{Q}^+$  genau einmal in der Liste erscheint. Um eine Liste aller positiven rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}^+$  zu erhalten, erstellen wir eine Matrix wie in der Abbildung angegeben.

Die  $i$ -te Reihe enthält alle Elemente mit dem Zähler  $i$ , die  $j$ -te Spalte alle Elemente mit dem Nenner  $j$ . Diese Matrix wird nun in eine Liste umgewandelt. Die Elemente werden entsprechend ihrer

Diagonalen (siehe Abbildung) aufgelistet. Die erste Diagonale enthält das Element  $\frac{1}{1}$ . Die zweite Diagonale die Elemente  $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$ . In der dritten Diagonalen würden wir jetzt die Elemente  $\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}$  hinzufügen. Würden wir aber  $\frac{2}{2}$  hinzufügen, so käme das Element  $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$  doppelt vor. Solche Elemente, die in der Liste schon enthalten sind, werden einfach übersprungen. Auf diese Art und Weise bekommt man eine Auflistung von  $\mathbb{Q}^+$ .

$\Rightarrow \mathbb{Q}^+$  ist abzählbar.  $\Rightarrow \mathbb{Q}$  ist abzählbar.

## Aufgabe 2

$A$  ist endlich  $\Rightarrow A$  ist abzählbar &  $A$  kann mit  $\{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}, k \in \mathbb{N}$  dargestellt werden.

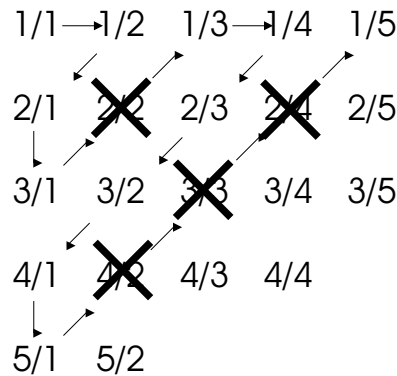


Abbildung 1: Abzählbarkeit von  $\mathbb{Q}$

Es ist genug zu zeigen, dass  $\forall a_i \in A, \forall j \in \mathbb{N}$ , die Menge  $M_j = \{f \mid f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_k) = j\}$  endlich ist. Also:  $\forall i \in [0, k-1]$  ist  $f(a_i) \leq j$ . Damit gibt es höchstens  $(j+1)^k$  viele Funktionen, die diese Bedingung erfüllen, also gilt, dass  $\forall j, M_j$  endlich ist.

Nach einem Lemma von der Vorlesung ist die Vereinigung von disjunkten endlichen Mengen abzählbar unendlich.

Also ist die Menge  $\{f : A \rightarrow \mathbb{N}\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j$  abzählbar unendlich.

## Aufgabe 3

Betrachten wir zunächst die Darstellung der Zahlen als Bitfolgen. Diese sind zwar unendlich, aber jede natürliche Zahl  $u$  hat nur endliche (beliebig große) Länge. Das bedeutet, dass ab einer gewissen Stelle nur noch Nullen in der Bitfolge stehen, z.B.

$$u = \underbrace{10 \dots 1}_{\text{beliebige Folge aus 0 und 1}} 0 \dots 0.$$

Dasselbe gilt natürlich auch für die Darstellung von  $v$  und somit auch für die verschränkte Darstellung  $(u_0, v_0, u_1, v_1, \dots)$ .

Nun betrachten wir eine vollständige Aufzählung dieser Bitfolgen. Zu dieser Aufzählung konstruieren wir durch eine Diagonalisierung eine weitere solche Folge. Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Es entsteht eine Bitfolge, die nicht von obiger Form ist; d.h., in der *nicht* nach einem beliebig langen Präfix aus 0 und 1 nur noch Nullen folgen. Die Folge enthält also unendlich viele Einsen. Lesen wir daraus wieder die Darstellungen der beiden Komponenten des Paares ab, so haben diese keine endliche Binärdarstellung und liegen somit nicht in  $\mathbb{N}$ . Das erzeugte Element liegt also auch nicht in  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .



2. Repräsentiert die erzeugte Folge  $f$  ein Element aus  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , dann besitzt diese einen Präfix der Länge  $k \in \mathbb{N}$ , nach dem keine 1 mehr auftritt. Sie ist also von der Form  $f = u 0^\infty$  und  $|u| = k$ . Betrachten wir nun eine beliebige andere Folge der Form  $g = v 0^\infty$  mit  $|v| = k$ , so muss diese in der Aufzählung innerhalb der ersten  $k$  Schritte auftauchen, da sie sich von allen späteren Elementen an mindestens einer Stelle unterscheidet.

Nun gibt es aber  $2^k$  solcher Folgen, und diese können nicht alle in den ersten  $k$  Schritten der Aufzählung vorkommen. Dieses Argument können wir für alle Folgen mit endlichen Präfixen der Länge mindestens  $k$  anwenden und schließen daraus, dass sogar unendlich viele Paare fehlen müssen.

Die Beweisidee beim Cantorschen Diagonalisierungsverfahren beruht darauf, dass man ein Element erzeugt, das in der Aufzählung nicht vorkommt, das jedoch genau die Eigenschaften besitzt wie die aufgezählten Elemente. Diese Eigenschaft ist in unserem Fall: eine Bitfolge entspricht eindeutig einem Paar natürlicher Zahlen. Da wir das nicht sicher voraussagen können, ist dieses Beweisverfahren hier also nicht anwendbar.

## Aufgabe 4

Führen wir die in der Aufgabe formulierte Konstruktion analog für die rationalen Zahlen durch, so werden wir im folgenden beweisen, dass wir damit keine vollständige Überdeckung des Intervalls  $[0, 1]$  erreichen müssen. Damit gilt eine wesentliche Beobachtung des Beweises hier nicht mehr, und wir können das Verfahren nicht wörtlich übertragen.

Zunächst stellen wir folgendes fest: Ordnen wir eine gegebene Aufzählung der rationalen Zahlen beliebig um, so erhalten wir wieder eine solche Aufzählung.

Wählen wir uns eine beliebige irrationale Zahl  $r$  im Intervall  $[0, 1]$ , dann liegen in jeder noch so kleinen Umgebung um diese stets auch rationale Zahlen. Ist nun der Abstand zwischen einer rationalen Zahl  $q$  und  $r$  gleich  $\varepsilon$ , so gibt es ein  $k \in \mathbb{N}$ , sodass  $\varepsilon > 10^{-k}$  ist. Ordnen wir eine gegebene Aufzählung so um, dass  $q$  darin frühestens an Position  $k$  vorkommt, so ist  $r$  *nicht* in dem  $q$  umgebenden Intervall enthalten. Insgesamt können wir damit eine Umordnung konstruieren, in der alle Zahlen, die nahe bei  $r$  liegen hinreichend spät aufgezählt werden. Danach wird  $r$  auch nicht in der Vereinigung aller die rationalen Zahlen umgebenden Intervalle enthalten sein, und die Überdeckung ist nicht vollständig.