



Sie dürfen dieses Aufgabenblatt unter den schon bekannten Bedingungen in Zweiergruppen abgeben.

1. (10 Punkte) Beweisen Sie, dass Polynomialzeitreduktionen transitiv sind, also:

$$L \leq_P L' \text{ und } L' \leq_P L'' \implies L \leq_P L''$$

2. (10 Punkte) Wie in der Vorlesung beschrieben bedeute **SMERF** (“simple mehrwertige Erfüllbarkeit”) die Menge aller Instanzen von **MERF**, bei denen die Formel nur simple Terme der Form $Y_i = a$ enthält, wobei Y_i eine der Variablen ist und a ein Wert aus dem Wertebereich B_i . Terme der Formen $Y_i \neq a$, $Y_i = Y_j$, und $Y_i \neq Y_j$ sind also nicht erlaubt.

Zeigen Sie, dass **SMERF** NP-vollständig ist.

3. (10 Punkte) *Ganzzahlige Programmierung* ist das Problem, ob eine gegebene Menge von linearen Ungleichungen in den Variablen x_1, \dots, x_n mit ganzzahligen Koeffizienten, also Ungleichungen der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_0,$$

mit $a_i \in \mathbb{Z}$, eine ganzzahlige Lösung besitzt, also eine ganzzahlige Belegung für die Variablen, so dass alle Ungleichungen der gegebenen Menge wahr sind.

- (a) Definieren Sie eine Sprache **GP**, die dem Ganzzahligen-Programmierungsproblem entspricht.
- (b) Zeigen Sie, dass **GP** NP-vollständig ist.
(Hinweis: Verwenden Sie **3-SAT**. Es kann hilfreich sein, die Variablenanzahl zu verdoppeln.)
4. (10 Punkte) Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$. Ein *Hamiltonscher Pfad* in G ist eine Auflistung v_1, v_2, \dots, v_n aller Knoten in V , sodass $[v_i, v_{i+1}] \in E$ für $i = 1, \dots, n - 1$. Ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist ein Hamiltonscher Pfad mit der zusätzlichen Eigenschaft $[v_n, v_1] \in E$. Es sei **HaPf** das Problem zu entscheiden, ob ein vorgegebener gerichteter Graph einen Hamiltonschen Pfad besitzt, und analog **HaKr** das Problem, ob ein Graph einen Hamiltonschen Kreis besitzt. Zeigen Sie, dass diese beiden Probleme in polynomialer Zeit ineinander transformierbar sind, also $\text{HaPf} \leq_P \text{HaKr}$ und $\text{HaKr} \leq_P \text{HaPf}$.