Zuerst einige allgemeine Definitionen: Ein *Präfix* eines Wortes $w = w_1 w_2 \dots w_n$ ist jedes Wort $w_1 \dots w_i$ mit $0 \leq i \leq n$. Ein *Suffix* von w is jedes Wort $w_i \dots w_n$ mit $1 \leq i \leq n+1$. (Beachte, dass ε sowohl ein Präfix ($i = 0$) als auch ein Suffix ($i = n + 1$) von w ist.

Wenn $w \in \Sigma^*$ uns $a \in \Sigma$, dann bezeichnen wir mit $\#_a(w)$ die Anzahl von a's, die im Wort w vorkommen.

1. (12 Punkte) Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Begründen Sie Ihre Entscheidung, d.h. falls die Sprache nicht regulär sein sollte, geben Sie einen Beweis dafür, falls die Sprache regulär ist, geben Sie einen DEA oder NEA dafür an.
   (a) $L_a = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{für jeden Präfix } u \text{ von } w \text{ gilt } \#_a(u) \geq \#_b(u)\}$
   (b) $L_b = \{w \in \{a,b\}^* \mid \text{für jeden Präfix } u \text{ von } w \text{ gilt } |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 2\}$
   (c) $L_c = \{a^i b^j \mid\ j \text{ ist ein ganzzahliges Vielfaches von } i\}$
   (d) $L_d = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist Binärdarstellung einer durch 6 teilbaren Zahl }\}$

2. (10 Punkte)
   (a) Geben Sie einen möglichst einfachen NEA an, der genau alle Worte in $\{a, b\}^*$ akzeptiert, die das Teilwort *ababa* enthalten.
   (b) Konstruieren Sie nach der in der Vorlesung angegebenen Methode aus dem NEA von Aufgabenteil (a) einen dazu äquivalenten DEA.

3. (10 Punkte) In dieser Frage geht es darum, dass deterministische endliche Automaten zwar im Prinzip genau so viel vermögen wie nicht-deterministische Automaten, dass sie aber dafür unter Umständen wesentlich mehr Zustände benötigen.

   Betrachten Sie für ein festes $k > 0$ folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:

   $$L_3 \quad = \quad \{w \in \Sigma^* \mid \text{ die } k\text{-t letzte Ziffer in } w \text{ ist eine } 1\}.$$

   (a) Geben Sie einen NEA an, der L_3 akzeptiert und der möglichst wenig Zustände besitzt. Wieviele Zustände hat er?
   (b) Geben Sie eine (möglichst hohe) untere Schranke für die Anzahl der Zustände an, die jeder DEA benötigt, der diese Sprache akzeptiert.

4. (Zusatzaufgabe 5 Punkte) In der Vorlesung wurde eine Methode vorgestellt, wie man einen Übergangsgraphen so modifizieren kann, dass eine einzelne mit ε beschriftete Kante entfernt wird, die akzeptierte Sprache aber die Gleiche bleibt.
   (a) Warum folgt daraus — im Gegensatz zum in der Vorlesung Behaupteten — nicht direkt, dass man aus jedem NEA mit ε-Übergängen einen NEA ohne solche Übergänge konstruieren kann?
   (b) Wie kann man die Argumentation erweitern, sodass man tatsächlich einen NEA ohne ε-Übergänge produziert?

      (*Hinweis:* Betrachte zuerst gerichtete Zyklen von ε-Kanten, und dann längste Pfade von ε-Kanten.)